Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 84 (44/2016)
Piątek, 4 listopada 2016 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **598**, **599** i **600** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

598. Zapisz liczbę 480 używając trzykrotnie cyfry 4.

599. Zapisz liczbę 484 używając trzykrotnie cyfry 4.

600. Zapisz liczbę 600 używając trzykrotnie cyfry 4.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

601. Czy kwadrat o boku długości 19 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 3 lub 5?

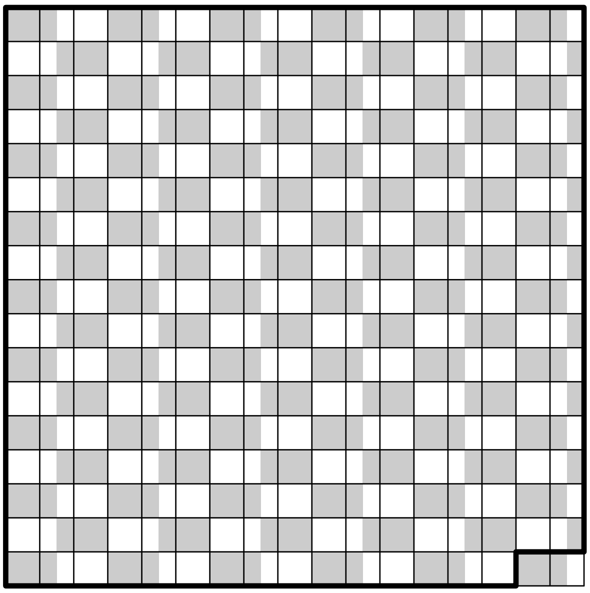
Rozwiązania zadań 594–597

594. $91=7\cdot\left(\frac{4!}{2}+0!\right)$

595. $92=2\cdot(47-0!)=70+4!-2$

596. $93=(4!+7)\cdot(2+0!)=(4+0!)!-27=2\cdot47-0!=\sqrt{7!+0!}+4!-2$

597. *Sposób I:* Pokolorujmy kwadrat w szachownicę zamalowując na czarno i biało prostokąty rozmiaru $1\times1,5$ jak na rysunku 1. Dla czytelności rysunku zamiast koloru czarnego użyliśmy pewnego odcienia szarości.



rys. 1

1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0

rys. 2

Wówczas każdy kwadrat o boku 2 lub boku 3 zakrywający odpowiednio 4 lub 9 pól (czyli kwadratów jednostkowych, na które dzielimy dany kwadrat o boku 17), pokrywa tyle samo pola czarnego, co białego. Wniosek stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić takimi kwadratami, musiałaby zawierać taką samą powierzchnię białą i czarną.

Na rysunku 1 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo pola białego i czarnego. Zatem cały kwadrat ma pola czarnego o jedną jednostkę powierzchni więcej niż białego – bilans ten można odczytać z prostokąta 1×2 w prawym dolnym rogu.

Skoro więc kwadrat 17×17 nie zawiera takiej samej powierzchni pokrytej na biało, co na czarno, nie może być podzielony na kwadraty 2×2 i 3×3.

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunku 2, gdzie w pola kwadratu wpisano liczby będące bilansem powierzchni obydwu kolorów. Wówczas każdy kwadrat 2×2 lub 3×3 pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola kwadratu jest równa 1.

Sposób II: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 3. Wówczas każdy kwadrat 2×2 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie liczb równej ± 3, a więc podzielnej przez 3. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 2 lub 3, musiałaby zawierać pola o sumie liczb podzielnej przez 3.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 17 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w ostatnim wierszu jest 17 jedynek).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 3

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

rys. 4

Sposób III: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 4. Wówczas każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 2×2 pokrywa pola o sumie liczb równej 0 lub ± 2, a więc parzystej. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 2 lub 3, musiałaby zawierać pola o parzystej sumie liczb.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 17 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w przedostatnim wierszu jest 17 jedynek).

Uwaga: Skrupulatne prześledzenie powyższych rozwiązań pozwala uzyskać wynik mocniejszy, chociaż mniej zgrabny w sformułowaniu:

Kwadratu 17×17 nie da się wypełnić prostokątami 1×2 ustawionymi pionowo i prostokątami 1×3 ustawionymi poziomo (tak jest w przypadku Sposobów I i II, natomiast w Sposobie III należy zamienić kierunki rolami).