Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 85 (45/2016)

Czwartek, 10 listopada 2016 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **602**, **603** i **604** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

602. Zapisz liczbę 193 używając cyfr 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

603. Zapisz liczbę 210 używając cyfr 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

604. Zapisz liczbę 216 używając cyfr 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

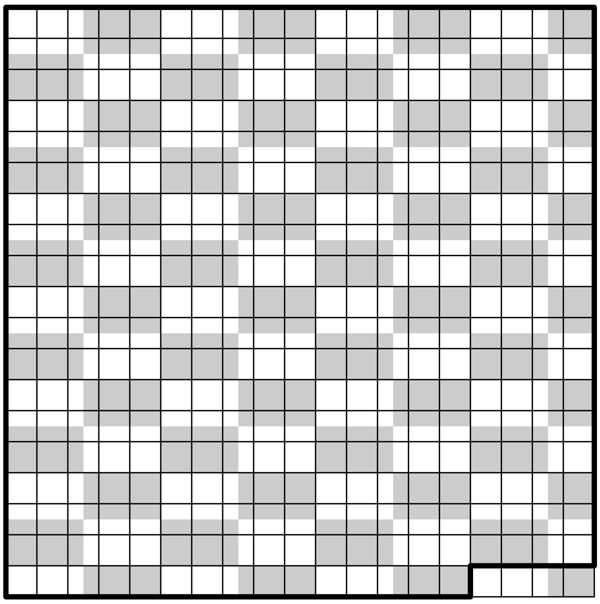
Kolorowania, numerowania i podziały figur

605. Czy kwadrat o boku długości 17 można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok długości 2, 3 lub 5?

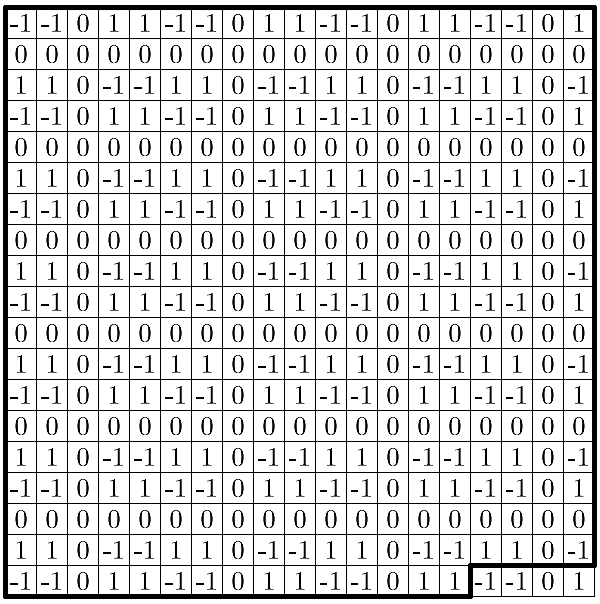
Rozwiązania zadań 598–601

598. $480=4!\cdot(4!-4)$ **599.** $484=\sqrt{\left(4!-\sqrt{4}\right)^4}$ **600.** $600=4!\cdot 4!+4!$

601. *Sposób I:* Pokolorujmy kwadrat w szachownicę zamalowując na czarno i biało prostokąty rozmiaru $1,5\times 2,5$ jak na rysunku 1.



rys. 1



-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1

rys. 2

Wówczas każdy kwadrat o boku 3 lub boku 5 zakrywający odpowiednio 9 lub 25 pól (czyli kwadratów jednostkowych, na które dzielimy dany kwadrat o boku 19), pokrywa tyle samo pola czarnego, co białego. Wniosek stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić takimi kwadratami, musiałaby zawierać taką samą powierzchnię białą i czarną.

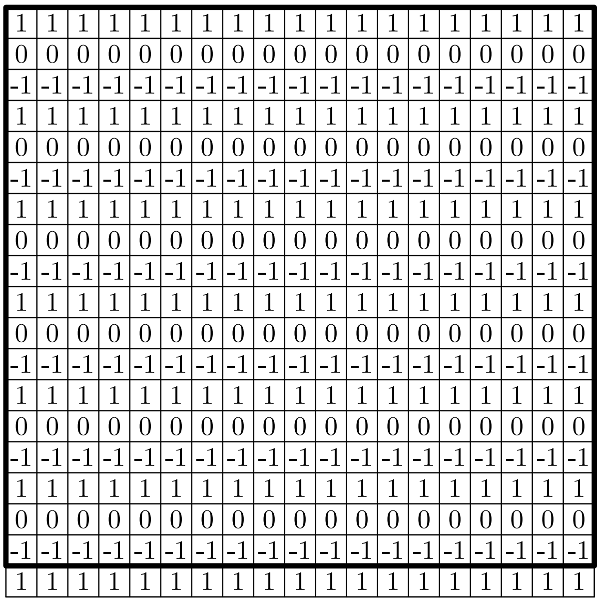
Na rysunku 1 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo pola białego i czarnego. Zatem cały kwadrat ma pola białego o jedną jednostkę powierzchni więcej niż czarnego – bilans ten można odczytać z prostokąta 1×4 w prawym dolnym rogu.

Skoro więc kwadrat 19×19 nie zawiera takiej samej powierzchni pokrytej na biało, co na czarno, nie może być podzielony na kwadraty 3×3 i 5×5.

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunku 2, gdzie w pola kwadratu wpisano liczby będące bilansem powierzchni obydwu kolorów. Wówczas każdy kwadrat 3×3 lub 5×5 pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola kwadratu jest równa -1.

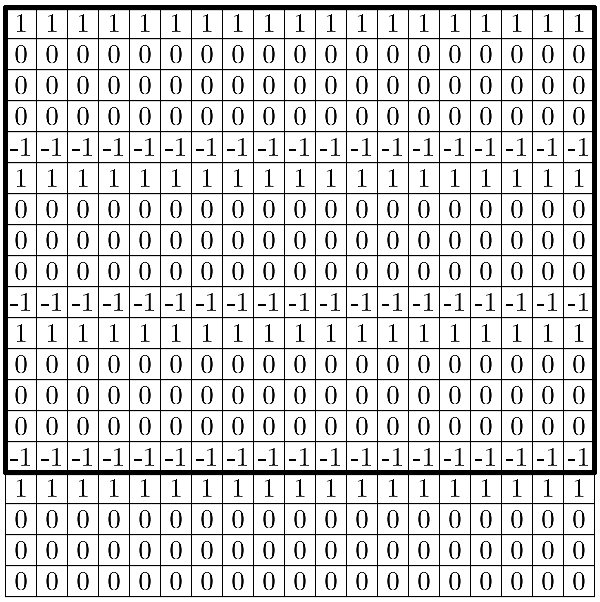
Sposób II: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 3. Wówczas każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 5×5 pokrywa pola o sumie liczb równej 0 lub ± 5, a więc podzielnej przez 5. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 3 lub 5, musiałaby zawierać pola o sumie liczb podzielnej przez 5.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 19 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w ostatnim wierszu jest 19 jedynek).



1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 3



1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

rys. 4

Sposób III: Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 4. Wówczas każdy kwadrat 5×5 pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0, natomiast każdy kwadrat 3×3 pokrywa pola o sumie liczb równej 0 lub ± 3, a więc podzielnej przez 3. Wynika stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić kwadratami o boku 3 lub 5, musiałaby zawierać pola o sumie liczb podzielnej przez 3.

Tymczasem suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 19 (figura obwiedziona grubą linią zawiera pola o sumie liczb równej 0, a w czwartym wierszu od dołu jest 19 jedynek).

Uwaga: Metody zastosowane w powyższym rozwiązaniu oraz w rozwiązaniu zadania **597** zaprezentowanym w poprzednim **Trapezie** pozwalają udowodnić następujące twierdzenie: Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k niepodzielnej przez żadną z liczb m i n, kwadratu o boku k nie można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok m lub n.

Zauważmy też, że gdy liczba k jest podzielna przez m lub przez n, kwadrat o boku k daje się w oczywisty sposób podzielić na jednakowe kwadraty o boku m lub n.