Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **622**, **623** i **624** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

622. Zapisz liczbę 367 używając cyfr 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

623. Zapisz liczbę 371 używając cyfr 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

624. Zapisz liczbę 381 używając cyfr 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 90 (50/2016)
Piątek, 16 grudnia 2016 r.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

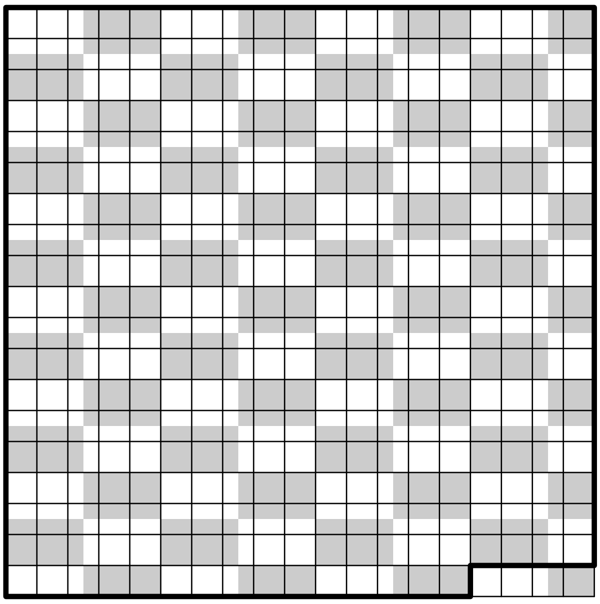
625. Czy sześcian o krawędzi długości 19 można podzielić na figury, z których każda jest sześcianem o krawędzi 2 lub prostopadłościanem o wymiarach $3\times 3\times 1$?

Rozwiązania zadań 618–621

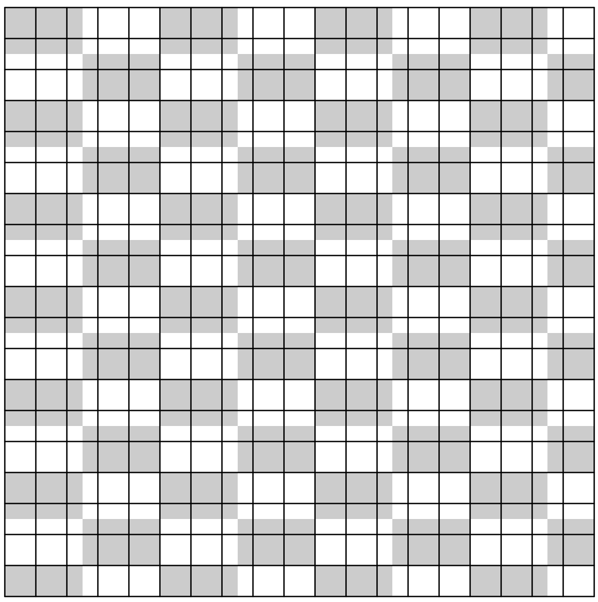
618. $336=\frac{7!}{3\cdot 5}$ **619.** $338=7^3-5$ **620.** $339=3\cdot(5!-7)$

621. Wykażemy, że podział sześcianu o krawędzi długości 19 na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3 lub 5, nie jest możliwy.

Sposób I: Pokolorujmy sześcian w trójwymiarową szachownicę zamalowując na czarno i biało prostopadłościany rozmiaru $1\times 1,5\times 2,5$. Jak to robimy? Otóż wyobraźmy sobie, że duży sześcian jest podzielony na 19^3 sześcianików jednostkowych (zwanych dalej polami, przez analogię do sytuacji dwuwymiarowej). W ten sposób powstaje 19 warstw prostopadłościennych o wymiarach $1\times 19\times 19$ złożonych z $19^2=361$ pól każda. Pola co drugiej warstwy, poczynając od górnej, malujemy jak na rysunku 1. Pola każdej z pozostałych 9 warstw malujemy jak na rysunku 2.



rys. 1



rys. 2

Wówczas każdy sześcian o krawędzi 2, 3 lub 5 zakrywający odpowiednio 8, 27 lub 125 pól, pokrywa tyle samo objętości czarnej, co białej. Wniosek stąd, że figura, którą dałoby się szczelnie wypełnić takimi sześcianami, musiałaby zawierać taką samą objętość białą i czarną.

Osiemnaście warstw od góry zawiera tyle samo objętości obu kolorów. Co do dziewiętnastej warstwy (tej na samym dole), to na rysunku 1 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo objętości białej i czarnej. Zatem cały sześcian ma o jedną jednostkę objętości więcej bieli niż czerni – bilans ten można odczytać z prostpadłościanu $1\times 1\times 4$, przedstawionego w prawym dolnym rogu rysunku 1 jako prostokąt 1×4.

Skoro więc sześcian $19\times 19\times 19$ nie zawiera takiej samej objętości zamalowanej na biało, co na czarno, nie może być podzielony na sześciany $2\times 2\times 2$, $3\times 3\times 3$ i $5\times 5\times 5$.

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunkach 3 i 4, gdzie w pola sześcianu wpisano liczby będące bilansem objętości obydwu kolorów. Wówczas każdy sześcian $2\times 2\times 2$, $3\times 3\times 3$ lub $5\times 5\times 5$ pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześcianu jest równa -1.

-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1

rys. 3

1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1	1	-1	-1	0	1
1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1	-1	1	1	0	-1

rys. 4

Sposób II: W pola każdej warstwy wpiszmy liczby jak na rysunku 3. Oznacza to, że każdy pionowy prostopadłościan $1\times 1\times 19$ zawierający 19 pól ma we wszytskie pola wpisaną tę samą liczbę. Zatem suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześcianu jest równa -19.

Ponadto każdy sześcian $3\times 3\times 3$ lub $5\times 5\times 5$ zajmujący odpowiednio 27 lub 125 pól, pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Natomiast każdy 8-polowy sześcian $2\times 2\times 2$ pokrywa pola o parzystej sumie liczb.

Skoro więc duży sześcian ma nieparzystą sumę liczb wpisanych w pola, a każdy dopuszczalny sześcian podziału pokrywa pola o parzystej sumie liczb, podział spełniający warunki zadania nie jest możliwy.

Uwaga: Modyfikacja powyższych rozwiązań pozwala uzsykać wynik mocniejszy: Sześcianu $19\times 19\times 19$ nie da się wypełnić prostopadłościanami $1\times 1\times 2$ ustawionymi pionowo, prostopadłościanami $1\times 1\times 5$ ustawionymi poziomo (wszerz), i prostopadłościanami $1\times 1\times 3$ ustawionymi poziomo (w głąb).