Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 91 (51/2016)
Czwartek, 22 grudnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na Święta

W łamigłówkach **626–634** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

626. Zapisz liczbę 62 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

627. Zapisz liczbę 63 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

628. Zapisz liczbę 92 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

629. Zapisz liczbę 93 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

630. Zapisz liczbę 103 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

631. Zapisz liczbę 118 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

Dziękuję Mistrzowi Byłemu Geometrii za wskazanie błędu w zadaniu **631**, gdzie zamiast 118 użyłem liczby 117.

632. Zapisz liczbę 133 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

633. Zapisz liczbę 141 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

634. Zapisz liczbę 154 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

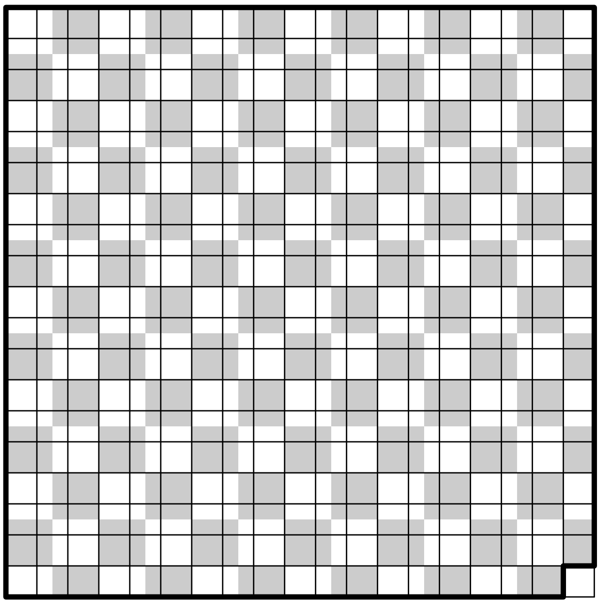
Kolorowania, numerowania i podziały figur

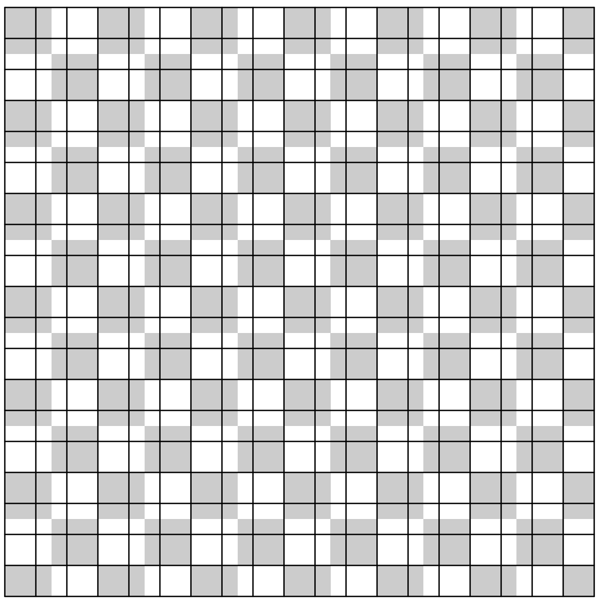
635. Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 2, 3, 5 ani 7, że sześcian o krawędzi długości n można podzielić na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3, 5 lub 7?

Rozwiązania zadań 622–625

622. $367=3\cdot 5!+7$ **623.** $371=7\cdot 53$ **624.** $381=3\cdot(5!+7)$

625. Wykażemy, że podział sześcianu o krawędzi długości 19 na sześciany o krawędzi 2 i prostopadłościany $3\times 3\times 1$ nie jest możliwy.


rys. 1


rys. 2

Sposób I: Pokolorujmy sześcian w trójwymiarową szachownicę zamalowując na czarno i biało prostopadłościany rozmiaru $1\times 1{,}5\times 1{,}5$. Załóżmy przy tym, że duży sześcian jest podzielony na 19^3 sześcianików jednostkowych zwanych dalej polami. W ten sposób powstaje 19 warstw prostopadłościennych o wymiarach $1\times 19\times 19$ złożonych z $19^2=361$

pól każda. Pola co drugiej warstwy, poczynając od górnej, malujemy jak na rysunku 1. Pola każdej z pozostałych 9 warstw malujemy jak na rysunku 2.

Wówczas każdy sześcian o krawędzi 2 zakrywający 8 pól, a także każdy 9-polowy prostopadłościan $3\times3\times1$, pokrywa tyle samo objętości czarnej, co białej. Wniosek stąd, że gdyby duży sześcian dało się szczelnie wypełnić takimi figurami, to musiałby on zawierać taką samą objętość białą i czarną.

Osiemnaście warstw od góry zawiera tyle samo objętości obu kolorów. Co do dziewiętnastej warstwy (tej na samym dole), to na rysunku 1 można prześledzić, że figura otoczona grubą linią zawiera tyle samo objętości białej i czarnej. Zatem cały sześcian ma o jedną jednostkę objętości więcej bieli niż czerni – bilans ten można odczytać z sześcianu $1\times1\times1$, przedstawionego w prawym dolnym rogu rysunku 1 jako kwadrat 1×1.

Skoro więc sześcian $19\times19\times19$ nie zawiera takiej samej objętości zamalowanej na biało, co na czarno, nie może być podzielony na sześciany $2\times2\times2$ i prostopadłościany $3\times3\times1$.

Liczbowa wersja tego samego sposobu rozwiązania jest przedstawiona na rysunkach 3 i 4, gdzie w pola sześcianu wpisano liczby będące bilansem objętości obydwu kolorów. Wówczas każdy sześcian $2\times2\times2$ i każdy prostopadłościan $3\times3\times1$ pokrywa pola z liczbami o sumie 0, a suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześcianu jest równa -1.

-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1

rys. 3

1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1
1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1	0	-1	1

rys. 4

Sposób II: W pola każdej warstwy wpiszmy liczby jak na rysunku 3. Oznacza to, że każdy pionowy prostopadłościan $1\times1\times19$ zawierający 19 pól ma we wszytskie pola wpisaną tę samą liczbę. Wtedy suma liczb wpisanych we wszystkie pola sześcianu jest równa -19. Ponadto każdy prostopadłościan $3\times3\times1$ zajmujący 9 pól, pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Natomiast każdy 8-polowy sześcian $2\times2\times2$ pokrywa pola o parzystej sumie liczb.

Skoro więc duży sześcian ma nieparzystą sumę liczb wpisanych w pola, a każdy dopuszczalny prostopadłościan podziału pokrywa pola o parzystej sumie liczb, podział spełniający warunki zadania nie jest możliwy.