Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 92 (52/2016)
Piątek, 30 grudnia 2016 r.

Łamigłówki i zadania na Nowy Rok

W łamigłówkach **636–644** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

636. Zapisz liczbę 224 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

637. Zapisz liczbę 241 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

638. Zapisz liczbę 243 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

639. Zapisz liczbę 253 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

640. Zapisz liczbę 255 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

641. Zapisz liczbę 324 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

642. Zapisz liczbę 342 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

643. Zapisz liczbę 355 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

644. Zapisz liczbę 421 używając cyfr 2, 0, 1 i 7 (każdej tylko raz).

Kolorowania, numerowania i podziały figur

645. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 12 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11.

Rozwiązania zadań 626–635

626. $62=72-10$ **627.** $63=2^{7-1}-0!$ **628.** $92=\sqrt{7!+0!}+21$

629. $93=10^2-7$ **630.** $103=\dfrac{((2+1)!)!+0!}{7}$ **631.** $118=2^7-10$

632. $133=7\cdot(20-1)$ **633.** $141=70\cdot 2+1=71\cdot 2-0!$ **634.** $154=7\cdot(21+0!)$

635. Udowodnimy istnienie takiej liczby całkowitej dodatniej n niepodzielnej przez 2, 3, 5 ani 7, że sześcian o krawędzi długości n można podzielić na sześciany, z których każdy ma krawędź długości 2, 3, 5 lub 7.

Przeprowadzimy konstrukcję polegającą na budowaniu coraz większych prostopadłościanów, biorąc za punkt wyjścia sześciany o krawędziach 2, 3, 5 i 7. Poniższa tabela przedstawia krok po kroku tworzenie kolejnych prostopadłościanów:

Budulce	Budowany prostopadłościan	Warunki
$2\times 2\times 2$	$30\times 6\times 2$	
$3\times 3\times 3$	$30\times 6\times 3$	
$30\times 6\times 2,\quad 30\times 6\times 3$	$30\times 6\times N$	$N\geqslant 2$
$2\times 2\times 2$	$30\times 10\times 2$	
$5\times 5\times 5$	$30\times 10\times 5$	
$30\times 10\times 2,\quad 30\times 10\times 5$	$30\times 10\times N$	$N\geqslant 4$
$3\times 3\times 3$	$30\times 15\times 3$	
$5\times 5\times 5$	$30\times 15\times 5$	
$30\times 15\times 3,\quad 30\times 15\times 5$	$30\times 15\times N$	$N\geqslant 8$
$30\times 6\times N,\quad 30\times 10\times N,\quad 30\times 15\times N$	$30\times N\times N$	$N\geqslant 30$

Budulce	Budowany prostopadłościan	Warunki
$2\times2\times2$	$42\times6\times2$	
$3\times3\times3$	$42\times6\times3$	
$42\times6\times2,\quad 42\times6\times3$	$42\times6\times N$	$N\geqslant 2$
$2\times2\times2$	$42\times14\times2$	
$7\times7\times7$	$42\times14\times7$	
$42\times14\times2,\quad 42\times14\times7$	$42\times14\times N$	$N\geqslant 6$
$3\times3\times3$	$42\times21\times3$	
$7\times7\times7$	$42\times21\times7$	
$42\times21\times3,\quad 42\times21\times7$	$42\times21\times N$	$N\geqslant 12$
$42\times6\times N,\quad 42\times14\times N,\quad 42\times21\times N$	$42\times N\times N$	$N\geqslant 44$
$2\times2\times2$	$70\times10\times2$	
$5\times5\times5$	$70\times10\times5$	
$70\times10\times2,\quad 70\times10\times5$	$70\times10\times N$	$N\geqslant 4$
$2\times2\times2$	$70\times14\times2$	
$7\times7\times7$	$70\times14\times7$	
$70\times14\times2,\quad 70\times14\times7$	$70\times14\times N$	$N\geqslant 6$
$5\times5\times5$	$70\times35\times5$	
$7\times7\times7$	$70\times35\times7$	
$70\times35\times5,\quad 70\times35\times7$	$70\times35\times N$	$N\geqslant 24$
$70\times10\times N,\quad 70\times14\times N,\quad 70\times35\times N$	$70\times N\times N$	$N\geqslant 82$
$3\times3\times3$	$105\times15\times3$	
$5\times5\times5$	$105\times15\times5$	
$105\times15\times3,\quad 105\times15\times5$	$105\times15\times N$	$N\geqslant 8$
$3\times3\times3$	$105\times21\times3$	
$7\times7\times7$	$105\times21\times7$	
$105\times21\times3,\quad 105\times21\times7$	$105\times21\times N$	$N\geqslant 12$
$5\times5\times5$	$105\times35\times5$	
$7\times7\times7$	$105\times35\times7$	
$105\times35\times5,\quad 105\times35\times7$	$105\times35\times N$	$N\geqslant 24$
$105\times15\times N,\quad 105\times21\times N,\quad 105\times35\times N$	$105\times N\times N$	$N\geqslant 140$

W ostatnim kroku konstrukcji składamy sześcian z prostopadłościanów o wymiarach $30\times N\times N$, $42\times N\times N$, $70\times N\times N$ i $105\times N\times N$. Jeżeli użyjemy po jednym prostopadłościanie każdego rodzaju, otrzymamy prostopadłościan o wymiarach $247\times N\times N$, który dla $N=247$ jest sześcianem. Pozostaje zauważyć, że liczba 247 nie jest podzielna przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7.

Uwagi: Ograniczenia na N podane w kolumnie "Warunki" mają jedynie charakter ciekawostkowo-informacyjny, a zrozumienie ich źródła nie jest istotne dla przeprowadzanego dowodu. Dla kompletności rozwiązania wystarczy sprawdzić, że każdorazowo można przyjąć $N=247$.

Ponieważ każda liczba naturalna $n\geqslant 384$ jest postaci $30a+42b+70c+105d$, gdzie a, b, c, d są nieujemnymi liczbami całkowitymi, każdy sześcian o całkowitoliczbowej długości krawędzi $n\geqslant 384$ daje się podzielić na sześciany o krawędziach 2, 3, 5 i 7.