Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 95 (3/2017)
Piątek, 20 stycznia 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **660**, **661**, **662** i **663** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

660. Zapisz liczbę 304 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

661. Zapisz liczbę 405 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

662. Zapisz liczbę 504 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

663. Zapisz liczbę 604 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz).

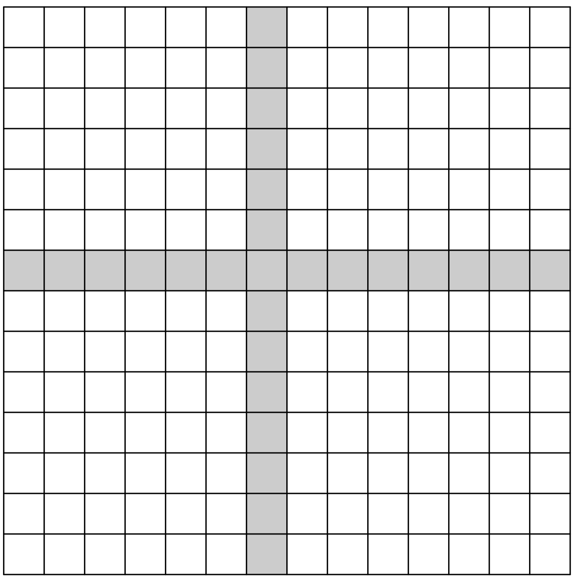
Kolorowania, numerowania i podziały figur

664. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 15 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11.

Rozwiązania zadań 656–659

656. $39=\sqrt{\sqrt{2^{20}}+7}$ **657.** $98=\sqrt{7!+0!}+\sqrt{3^6}$ **658.** $109=\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(3!)^{4!}}}}+\sqrt{4}}{2}$

659. Wykażemy, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11, nie jest możliwy.



rys. 1

1	-1	1	-1	1	-1				1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1				-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1				1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1				-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1				1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1				-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1				1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1				-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1				1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1				-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1				1	-1	1	-1	1

rys. 2

Sposób I:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Wówczas każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole albo pokrywa same zamalowane pola. Tak czy owak liczba zamalowanych pól pokrywanych przez prostokąt jest nieparzysta. Gdyby więc istniał podział kwadratu o boku 14 na prostokąty 1×9 i 1×11, musiałoby być nieparzyście wiele prostokątów podziału, gdyż zamalowanych jest nieparzyście wiele pól (zamalowanych jest 27 pól). Z drugiej zaś strony każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa nieparzyście wiele pól, a skoro liczba wszystkich pól dużego kwadratu jest parzysta (kwadrat zawiera 196 pól), liczba prostokątów podziału musiałaby być parzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób II:

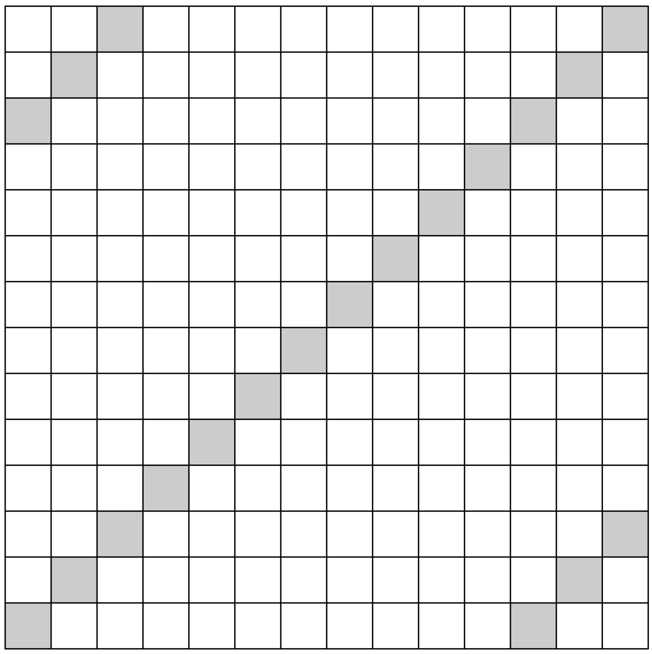
Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa 0, 8 lub 10 niezamalowanych pól, czyli parzyście wiele niezamalowanych pól. Tymczasem liczba wszystkich niezamalowanych pól jest nieparzysta (niezamalowanych pól jest 169). To dowodzi, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób III:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpiszmy w pola liczby jak na rysunku 2. Puste pola traktujemy tak, jak gdyby wpisana w nie była liczba 0. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Tymczasem suma wszytskich liczb wpisanych w pola dużego kwadratu jest równa 1, a więc jest różna od zera. To dowodzi, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób IV:

Podzielmy kwadrat o boku 14 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 27 pól, prostokątów podziału musi być 17 lub 19.



rys. 3

Pokolorujmy teraz pola jak na rysunku 3. Wówczas każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 20 pól, podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 musi składać się z co najmniej 20 prostokątów. To stoi w sprzeczości z uzyskaną wcześniej liczbą prostokątów podziału jako jedną z liczb 17 i 19. Tym samym wykazaliśmy, że podział kwadratu o boku 14 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.