Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 97 (5/2017)
Piątek, 3 lutego 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **669**, **670** i **671** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

669. Zapisz liczbę 44 używając cyfr 5, 7 i 8 (każdej tylko raz).

670. Zapisz liczbę 48 używając cyfr 5, 7 i 8 (każdej tylko raz).

671. Zapisz liczbę 50 używając cyfr 5, 7 i 8 (każdej tylko raz).

Kolorowania, numerowania i podziały figur

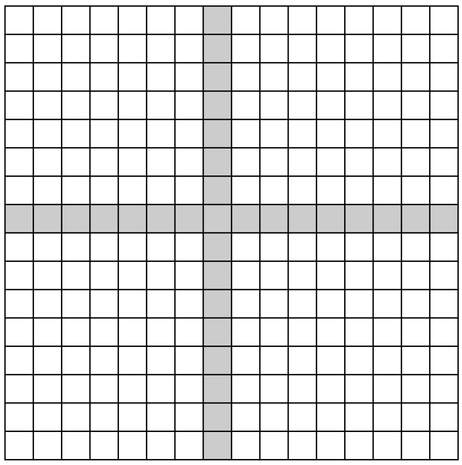
672. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 17 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11.

Rozwiązania zadań 665–668

665. $22=\frac{5!}{8}+7$ **666.** $32=\sqrt{\sqrt{5^8}+7}$ **667.** $33=5\cdot 8-7=5!-87$

Drugie rozwiązanie zadania **667** znalazłem po otrzymaniu od **Mistrza Byłego Geometrii** informacji, że zadanie ma dwa rozwiązania.

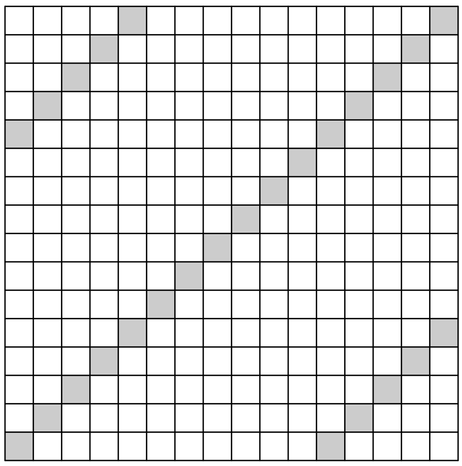
668. Wykażemy, że podział kwadratu o boku 16 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11, nie jest możliwy.



rys. 1

Sposób I:

Podzielmy kwadrat o boku 16 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Wówczas każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole albo pokrywa same zamalowane pola. Tak czy owak liczba zamalowanych pól pokrywanych przez prostokąt jest nieparzysta. Gdyby więc istniał podział kwadratu o boku 16 na prostokąty 1×9 i 1×11, musiałoby być nieparzyście wiele prostokątów podziału, gdyż zamalowanych jest nieparzyście wiele pól (zamalowanych jest 31 pól). Z drugiej zaś strony każdy prostokąt 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa nieparzyście wiele pól, a skoro liczba wszystkich pól dużego kwadratu jest parzysta (kwadrat zawiera 256 pól), liczba prostokątów podziału musiałaby być parzysta. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 16 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.



rys. 2

Sposób II:

Podzielmy kwadrat o boku 16 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa 0, 8 lub 10 niezamalowanych pól, czyli parzyście wiele niezamalowanych pól.

Tymczasem liczba wszystkich niezamalowanych pól jest nieparzysta (niezamalowanych pól jest 225). To dowodzi, że podział kwadratu o boku 16 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób III:

Podzielmy kwadrat o boku 16 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 31 pól, prostokątów podziału musi być 21 lub 23.

Pokolorujmy teraz pola jak na rysunku 2. Wówczas każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 26 pól, podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 musi składać się z co najmniej 26 prostokątów. To stoi w sprzeczości z uzyskaną wcześniej liczbą prostokątów podziału jako jedną z liczb 21 i 23. Tym samym wykazaliśmy, że podział kwadratu o boku 16 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób IV:

Podzielmy kwadrat o boku 16 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 31 pól, prostokątów podziału musi być 21 lub 23.

Zatem prostokąty podziału pokrywają co najwyżej $23\cdot 11 = 253$ pola, podczas gdy kwadrat o boku 16 składa się z 256 pól. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 16 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób V:

Podzielmy kwadrat o boku 16 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpiszmy w pola liczby jak na rysunku 3. Puste pola traktujemy tak, jak gdyby wpisana w nie była liczba 0. Wówczas każdy prostokąt o wymiarach 1×9 lub 1×11 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. Tymczasem suma wszytkich liczb wpisanych w pola dużego kwadratu jest równa 1, a więc jest różna od zera. To dowodzi, że podział kwadratu o boku 16 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1	1	-1	1

rys. 3