Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 98 (6/2017)
Piątek, 10 lutego 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **673**, **674** i **675** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

673. Zapisz liczbę 126 używając cyfr 5, 7 i 8 (każdej tylko raz).

674. Zapisz liczbę 135 używając cyfr 5, 7 i 8 (każdej tylko raz).

675. Zapisz liczbę 144 używając cyfr 5, 7 i 8 (każdej tylko raz).

Kolorowania, numerowania i podziały figur

676. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 23 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11.

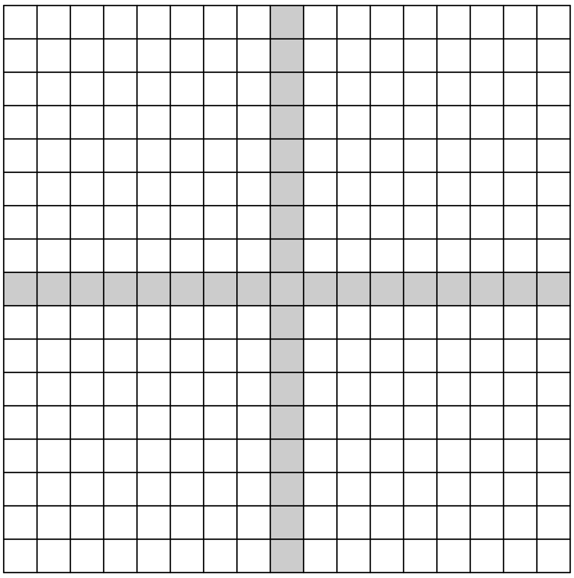
Rozwiązania zadań 669–672

669. $44=\sqrt{\sqrt{7^8}}-5$ **670.** $48=\frac{8!}{7\cdot 5!}$ **671.** $50=\frac{7!}{5!}+8$

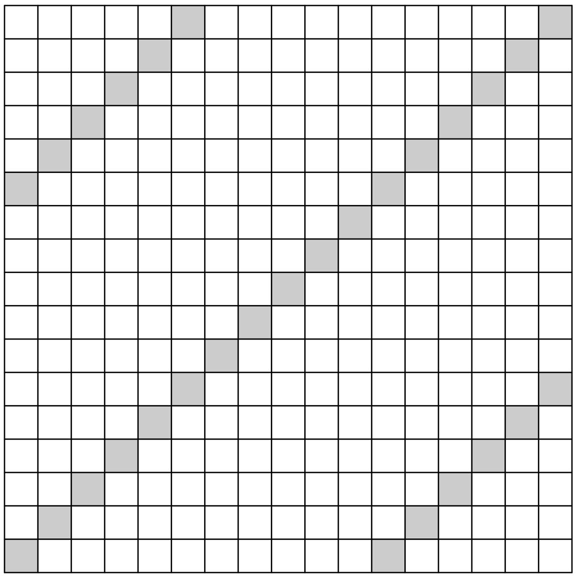
672. Wykażemy, że podział kwadratu o boku 17 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×9 lub 1×11, nie jest możliwy.

Sposób I:

Podzielmy kwadrat o boku 17 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowane są 33 pola, prostokątów podziału musi być 23 lub 25.



rys. 1



rys. 2

Pokolorujmy teraz pola jak na rysunku 2. Wówczas każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowanych jest 29 pól, podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 musi składać się z co najmniej

29 prostokątów. To stoi w sprzeczości z uzyskaną wcześniej liczbą prostokątów podziału jako jedną z liczb 23 i 25. Tym samym wykazaliśmy, że podział kwadratu o boku 17 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób II:

Podzielmy kwadrat o boku 17 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Przypuśćmy, że podział kwadratu na prostokąty 1×9 i 1×11 jest możliwy. Wówczas dokładnie jeden prostokąt podziału zawiera same zamalowane pola (jest ich 9 lub 11), a każdy z pozostałych prostokątów zawiera dokładnie jedno zamalowane pole. Ponieważ zamalowane są 33 pola, prostokątów podziału musi być 23 lub 25.

Zatem prostokąty podziału pokrywają co najwyżej $25\cdot 11 = 275$ pól, podczas gdy kwadrat o boku 17 składa się z 289 pól. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że podział kwadratu o boku 17 na prostokąty o wymiarach 1×9 i 1×11 nie jest możliwy.

Sposób III:

Podzielmy kwadrat o boku 17 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpiszmy w pola liczby jak na rysunku 3. Wówczas każdy prostokąt 1×9 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0 lub -2, a każdy prostokąt 1×11 ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0 lub -20. Przy tym suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 16. Nie można więc podzielić kwadratu o dodatniej sumie liczb na prostokąty zawierające pola o sumie niedodatniej.

1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	80	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	-10	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 3