Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 102 (10/2017)
Piątek, 10 marca 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **696**, **697** i **698** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

696. Zapisz liczbę 127 używając cyfr 1, 4 i 7 (każdej tylko raz).

697. Zapisz liczbę 144 używając cyfr 1, 4 i 7 (każdej tylko raz).

698. Zapisz liczbę 211 używając cyfr 1, 4 i 7 (każdej tylko raz).

Kolorowania, numerowania i podziały figur

699. Rozstrzygnij, czy sześcian o krawędzi 37 można podzielić na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times19$ lub $1\times1\times21$.

Rozwiązania zadań 692–695

692. $30=\dfrac{(7-1)!}{4!}=4!+7-1$ **693.** $50=\sqrt{7^4}+1$ **694.** $121=\left(7-\sqrt{4}\right)!+1$

695. Wykażemy, że podział sześcianu o krawędzi 36 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times19$ lub $1\times1\times21$, nie jest możliwy.

Podzielmy sześcian o krawędzi 36 na sześciany jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Dokładniej, każda warstwa oprócz osiemnastej od góry jest pokolorowana tak jak na rysunku 2, natomiast pola warstwy osiemnastej nie są pokolorowane.

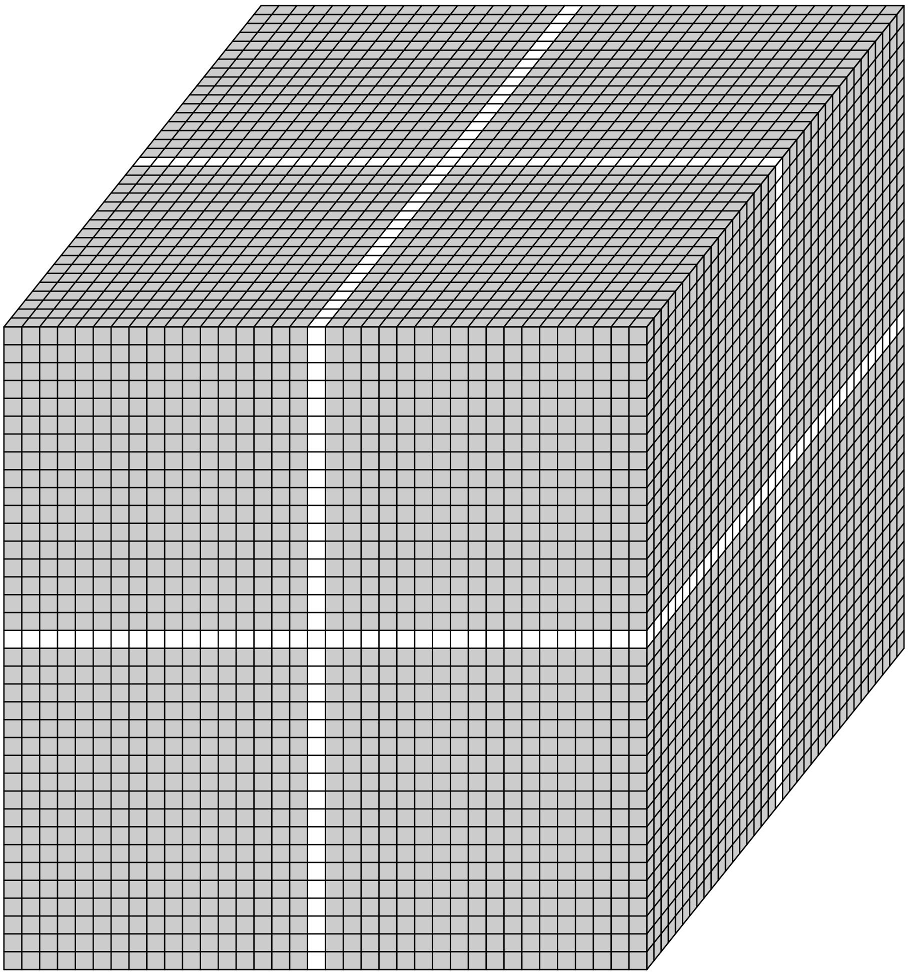
Wówczas każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times1\times19$ ułożony w danym sześcianie po kratkach pokrywa 19 pól niezamalowanych albo jedno pole niezamalowane i 18 zamalowanych. Z kolei każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times1\times21$ ułożony po kratkach pokrywa 21 pól niezamalowanych albo jedno pole niezamalowane i 20 zamalowanych. Wynika stąd, że prostopadłościany dopuszczalnych rozmiarów pokrywają 0, 18 lub 20 zamalowanych pól, a więc parzystą ich liczbę. Tymczasem liczba zamalowanych pól w całym sześcianie o krawędzi 36 jest równa 35^3, a zatem jest nieparzysta.

To dowodzi, że podział sześcianu o krawędzi 36 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times19$ lub $1\times1\times21$, nie jest możliwy.

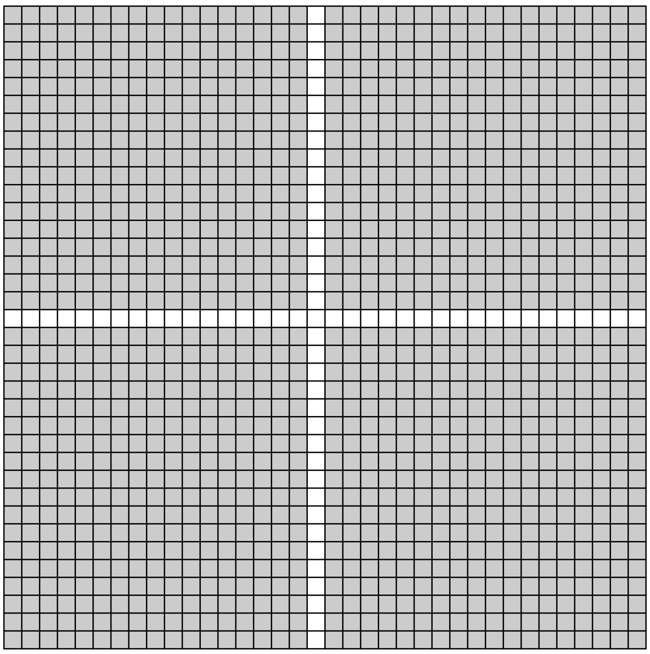
Uwaga:

Wnikliwy Czytelnik już dawno zauważył, że stosując podany wyżej schemat można udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ oraz dowolnej liczby całkowitej dodatniej $k<2n-1$
- nie jest możliwy podział kwadratu o boku $2k$ na prostokąty, z których każdy ma wymiary $1\times(2n-1)$ lub $1\times(2n+1)$,
- nie jest możliwy podział sześcianu o krawędzi $2k$ na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times(2n-1)$ lub $1\times1\times(2n+1)$.

Ponadto Czytelnik obdarzony wyobraźnią czasoprzestrzenną bez trudu dostrzeże jak rozwiązać analogiczne zadanie w wersji czterowymiarowej (a dla koneserów: w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów).



rys. 1



rys. 2