Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **721**, **722** i **723** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

721. Zapisz liczbę 1014 używając cyfr 2, 3, 3 i 7.

722. Zapisz liczbę 1021 używając cyfr 2, 3, 3 i 7.

723. Zapisz liczbę 1023 używając cyfr 2, 3, 3 i 7.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 108 (16/2017)
Piątek, 21 kwietnia 2017 r.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

724. Rozstrzygnij, czy sześcian o krawędzi 18 można podzielić na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times10$ lub $1\times1\times13$.

Rozwiązania zadań 717–720

717. $1680=\dfrac{7!}{4-1}=\dfrac{(7+1)!}{4!}$ **718.** $2400=7^4-1$ **719.** $4999=7!-41$

720. Wykażemy, że podział sześcianu o krawędzi 17 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times10$ lub $1\times1\times13$, nie jest możliwy.

Sposób I:

Podzielmy sześcian o krawędzi 17 na sześciany jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy niektóre pola jak na rysunku 1. Dokładniej, każda warstwa oprócz dziewiątej od góry jest pokolorowana tak jak na rysunku 2, natomiast pola warstwy dziewiątej nie są pokolorowane.

Wówczas każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times1\times10$ ułożony w danym sześcianie po kratkach pokrywa 10 pól niezamalowanych albo jedno pole niezamalowane i 9 zamalowanych. Z kolei każdy prostopadłościan o wymiarach $1\times1\times13$ ułożony po kratkach pokrywa 13 pól niezamalowanych albo jedno pole niezamalowane i 12 zamalowanych. Wynika stąd, że prostopadłościany dopuszczalnych rozmiarów pokrywają 0, 9 lub 12 zamalowanych pól, a więc liczbę podzielną przez 3. Tymczasem liczba zamalowanych pól w całym sześcianie o krawędzi 17 jest równa 16^3, a zatem jest niepodzielna przez 3.

To dowodzi, że podział sześcianu o krawędzi 17 na prostopadłościany, z których każdy ma wymiary $1\times1\times10$ lub $1\times1\times13$, nie jest możliwy.

Sposób II:

Podzielmy sześcian o krawędzi 17 na sześciany jednostkowe zwane dalej polami, a następnie wpiszmy w pola liczby według następującego schematu: w pola warstw 1, 4, 7, 11, 14 i 17 wpisujemy liczby jak na rysunku 3, a w pola warstw 3, 6, 9, 13, 16 jak na rysunku 4 — są tam liczby przeciwne do odpowiednich liczb na rysunku 3. Puste pola traktujemy tak, jak gdyby wpisane w nie były zera, a więc w szczególności warstwy 2, 5, 8, 10, 12 i 15 uważamy za wypełnione zerami.

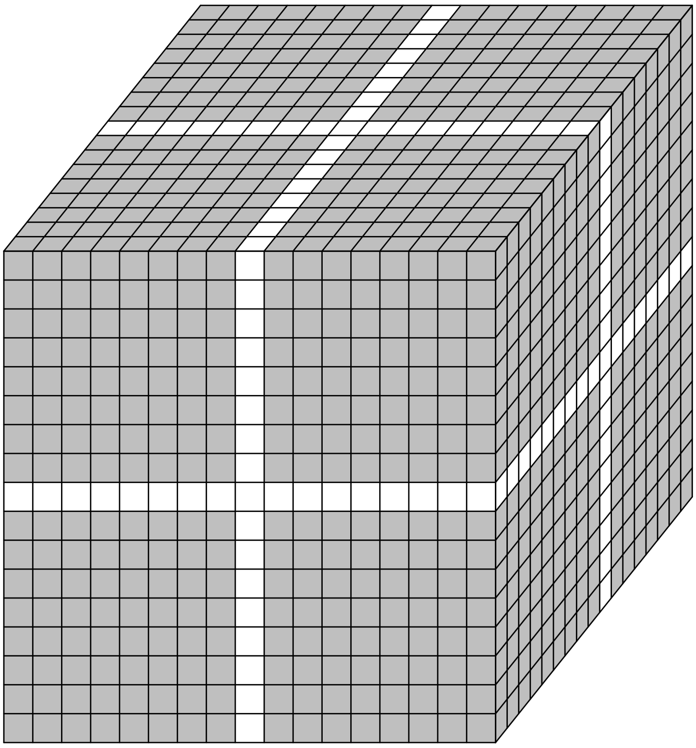
Wówczas suma liczb wpisanych w pola sześcianu jest równa 1, a każdy prostopadłościan $1\times1\times10$ lub $1\times1\times13$ ułożony po kratkach pokrywa pola o sumie wpisanych liczb równej 0. To dowodzi, że podział spełniający warunki zadania nie jest możliwy.

Uwaga: Reguła wpisywania liczb w sposobie II jest następująca: na odcinkach jednostkowych każdej z trzech dowolnie wybranych krawędzi prostopadłych wpisujemy liczby

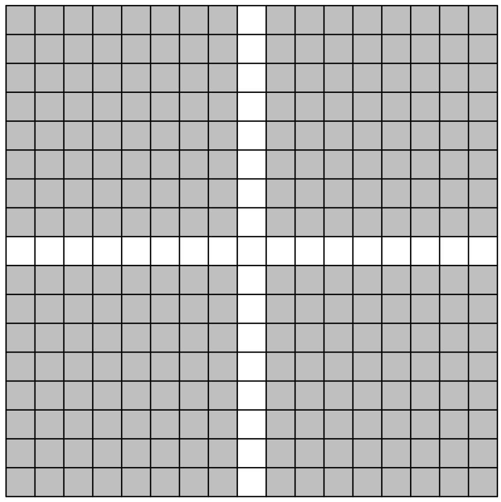
$$1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1\,,$$

a w każde pole sześcianu wpisujemy iloczyn trzech liczb napisanych na odcinkach jednostkowych będących rzutami tego pola na trzy wybrane krawędzie. W ten sposób powstaje swego rodzaju trójwymiarowa tabliczka mnożenia, mało ciekawa z matematycznego punktu widzenia, bo zawierająca tylko iloczyny liczb 0, 1 i -1. Wypisany wyżej ciąg 17 liczb ma następujące własności:

- suma dowolnych kolejnych 10 lub 13 liczb jest równa 0,
- suma wszystkich 17 liczb jest równa 1.



rys. 1



rys. 2

1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1

rys. 3

-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1
1		-1	1		-1	1		-1		1		-1	1		-1	1
-1		1	-1		1	-1		1		-1		1	-1		1	-1

rys. 4