Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **754–759** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

754. Zapisz liczbę 50 używając cyfr 1, 1, 1 i 4.

755. Zapisz liczbę 60 używając cyfr 1, 1, 1 i 4.

756. Zapisz liczbę 65 używając cyfr 1, 1, 1 i 4.

757. Zapisz liczbę 71 używając cyfr 1, 1, 1 i 4.

758. Zapisz liczbę 81 używając cyfr 1, 1, 1 i 4.

759. Zapisz liczbę 87 używając cyfr 1, 1, 1 i 4.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 114 (22/2017)
Piątek, 2 czerwca 2017 r.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

760. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 86 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×26 lub 1×27.

Rozwiązania zadań 747–753

747. $105=111-3!$

748. $122=(3!-1)!+1+1$

749. $143=11\cdot 13$

750. $156=\dfrac{13!}{11!}$

751. $169=13^{1+1}$

752. $243=\sqrt{3^{11-1}}$

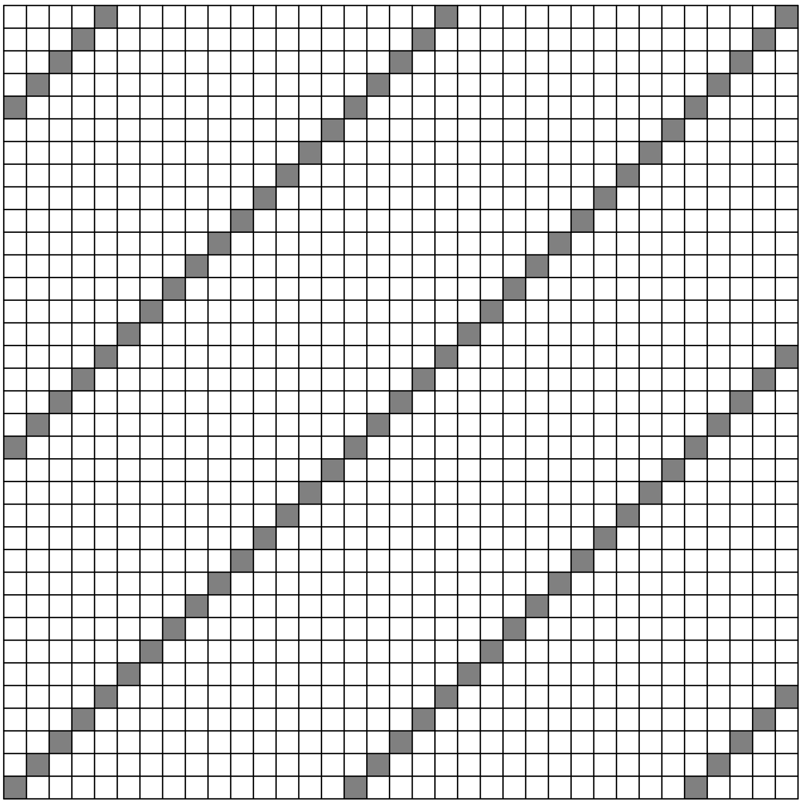
753. Wykażemy, że podział kwadratu o boku 35 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×14 lub 1×15, nie jest możliwy.

W tym celu podzielmy kwadrat o boku 35 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy na dwa sposoby niektóre pola.

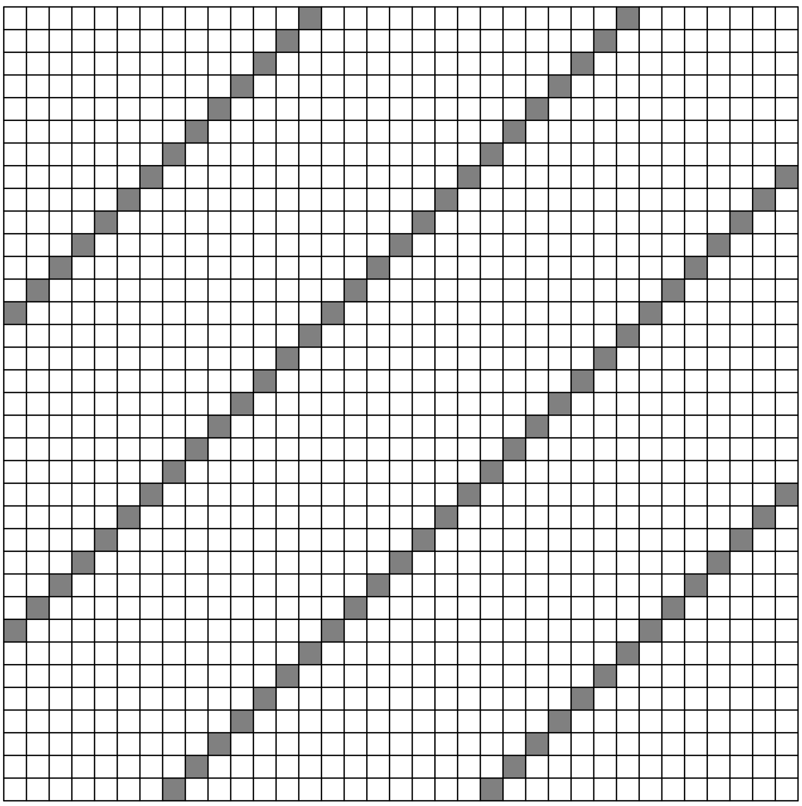
Pierwszy sposób kolorowania jest przedstawiony na rysunku 1, gdzie pokolorowane są pola leżące wzdłuż przekątnej kwadratu oraz pola leżące na takich liniach ukośnych równoległych do tej przekątnej, aby w każdym rzędzie poziomym i w każdym rzędzie pionowym pokolorowane było co 15-te pole. Przy takim kolorowaniu zamalowanych zostaje $35+2\cdot 20+2\cdot 5=\mathbf{85}$ pól. Zauważmy przy tym, że każdy prostokąt o wymiarach 1×15 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a prostokąt 1×14 pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Pokrycie wszystkich zamalowanych pól wymaga więc użycia co najmniej 85 prostokątów.

W drugim sposobie pokolorowania, pokazanym na rysunku 2, zamalowane są pola leżące wzdłuż takich linii ukośnych, aby w każdym rzędzie poziomym i w każdym rzędzie pionowym pokolorowane było co 14-te pole. Przy tym dwie najdłuższe z tych linii ułożone są symetrycznie względem przekątnej kwadratu. Liczba pokolorowanych pól jest wówczas równa $2\cdot 28+2\cdot 14=\mathbf{84}$. Przy tym każdy prostokąt o wymiarach 1×14 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a prostokąt 1×15 pokrywa co najmniej jedno zamalowane pole. Nie da się więc ułożyć w kwadracie 35×35 więcej niż 84 prostokąty.

Wykazaliśmy więc, że przy podziale kwadratu o boku 35 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×14 lub 1×15, liczba prostokątów podziału musi być nie mniejsza od 85 i jednocześnie nie większa od 84. Ta sprzeczność dowodzi, że taki podział nie jest możliwy.



rys. 1



rys. 2