Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 116 (24/2017)
Środa, 14 czerwca 2017 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **768–773** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

768. Zapisz liczbę 19 używając cyfr 1, 1, 1 i 6.

769. Zapisz liczbę 37 używając cyfr 1, 1, 1 i 6.

770. Zapisz liczbę 44 używając cyfr 1, 1, 1 i 6.

771. Zapisz liczbę 48 używając cyfr 1, 1, 1 i 6.

772. Zapisz liczbę 49 używając cyfr 1, 1, 1 i 6.

773. Zapisz liczbę 50 używając cyfr 1, 1, 1 i 6.

Kolorowania, numerowania i podziały figur

774. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 100 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×26 lub 1×27.

Rozwiązania zadań 761–767

761. $71=\sqrt{(5+1+1)!+1}$ **762.** $102=51\cdot(1+1)$ **763.** $108=5!-11-1$

764. $125=5^{1+1+1}$ **765.** $126=5!+(1+1+1)!$ **766.** $144=\dfrac{((1+1+1)!)!}{5}$

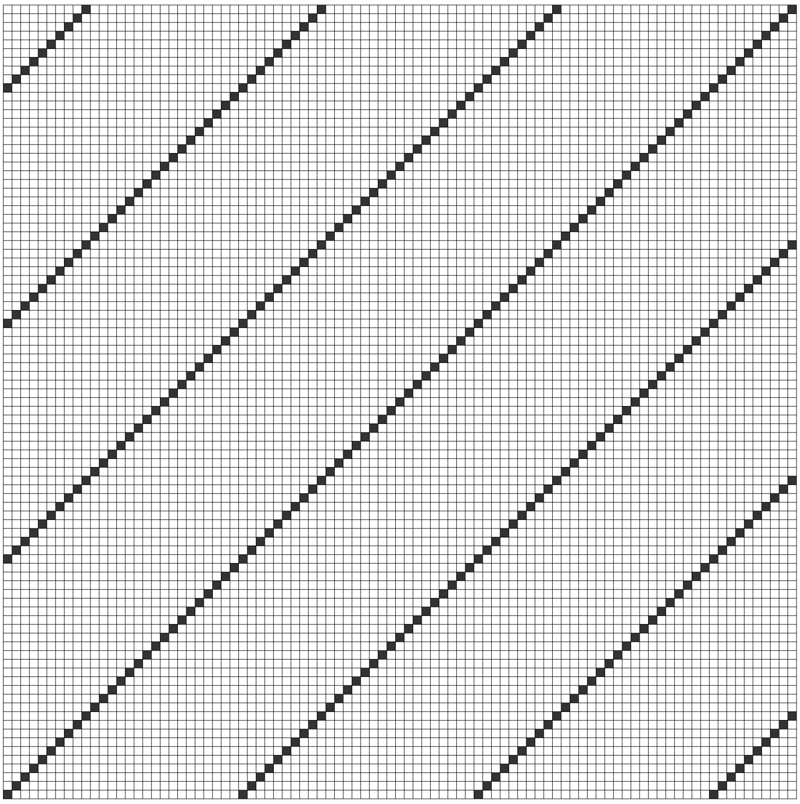
767. Wykażemy, że podział kwadratu o boku 91 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×26 lub 1×27, nie jest możliwy.

W tym celu podzielmy kwadrat o boku 91 na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami, a następnie pokolorujmy na dwa sposoby niektóre pola.

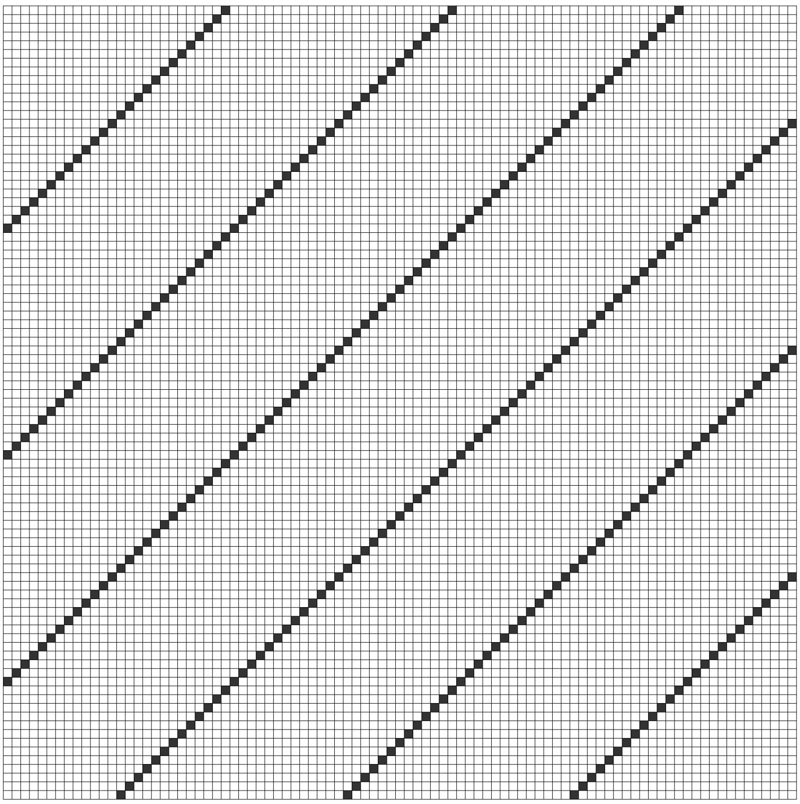
Pierwszy sposób kolorowania jest przedstawiony na rysunku 1, gdzie pokolorowane są pola leżące wzdłuż przekątnej kwadratu oraz pola leżące na takich liniach ukośnych równoległych do tej przekątnej, aby w każdym rzędzie poziomym i w każdym rzędzie pionowym pokolorowane było co 27-me pole. Przy takim kolorowaniu zamalowanych zostaje $91+2\cdot 64+2\cdot 37+2\cdot 10=\mathbf{313}$ pól. Zauważmy przy tym, że każdy prostokąt o wymiarach 1×27 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a prostokąt 1×26 pokrywa co najwyżej jedno zamalowane pole. Pokrycie wszystkich zamalowanych pól wymaga więc użycia co najmniej 313 prostokątów.

W drugim sposobie pokolorowania, pokazanym na rysunku 2, zamalowane są pola leżące wzdłuż takich linii ukośnych, aby w każdym rzędzie poziomym i w każdym rzędzie pionowym pokolorowane było co 26-te pole. Przy tym dwie najdłuższe z tych linii ułożone są symetrycznie względem przekątnej kwadratu. Liczba pokolorowanych pól jest wówczas równa $2\cdot 78+2\cdot 52+2\cdot 26=\mathbf{312}$. Przy tym każdy prostokąt o wymiarach 1×26 ułożony po kratkach pokrywa dokładnie jedno zamalowane pole, a prostokąt 1×27 pokrywa co najmniej jedno zamalowane pole. Nie da się więc ułożyć w kwadracie 91×91 więcej niż 312 prostokątów.

Wykazaliśmy więc, że przy podziale kwadratu o boku 91 na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×26 lub 1×27, liczba prostokątów podziału musi być nie mniejsza od 313 i jednocześnie nie większa od 312. Ta sprzeczność dowodzi, że taki podział nie jest możliwy.



rys. 1



rys. 2