Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 127 (35/2017)
Piątek, 1 września 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **835**, **836** i **837** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

835. Zapisz liczbę 45 używając cyfr 0, 1, 3 i 3.

836. Zapisz liczbę 66 używając cyfr 0, 1, 3 i 8 (każdej tylko raz).

837. Zapisz liczbę 99 używając cyfr 0, 1, 3 i 9 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

838. Zapisz wyrażenie

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

839. Rozstrzygnij, czy liczba

$$41+29\sqrt{2}$$

jest sumą kwadratów 2017 liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

840. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n, że liczba m^m jest podzielna przez n^n.

Czy stąd wynika, że liczba m jest podzielna przez n ?

841. Udowodnij, że każda liczba postaci $m^{n^{3^3}}$ może być zapisana w postaci $a^{b^{2^{2^2}}}$. Występujące tu liczby m, n, a, b są całkowite dodatnie.

842. Podaj 3 przykłady par takich liczb naturalnych m, n większych od 1, że

$$\left(\sqrt[m]{m}\right)^2=\sqrt[n]{n}\,.$$

843. Podaj 3 przykłady par takich liczb naturalnych m, n większych od 1, że

$$(m^n)^2=n^m\,.$$

Rozwiązania zadań 830–834

830. $330=\frac{7!}{4!}+5!$ **831.** $338=\sqrt{\sqrt{\sqrt{7^{4!}}}-5}$ **832.** $360=5!\cdot(7-4)$ **833.** $370=5\cdot 74$

834. *Sposób I:* Stosując procedurę opisaną w rozwiązaniach zadań **781**, **788** i **795** zaprezentowanych w **Trapezach 117–120**, dochodzimy do rozmieszczenia liczb przedstawionego na rysunku 1. Wprawdzie każdy prostokąt o wymiarach 1×8 lub 1×11 narysowany po kratkach pokrywa pola o nieujemnej sumie liczb, ale suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu jest równa 14. Trzeba więc dokonać takiej korekty tej konfiguracji liczb, aby nie psując nieujemności sum liczb pokrywanych przez prostokąty 1×8 i 1×11, zmniejszyć sumę wszystkich liczb wpisanych w kwadrat.

Zajmijmy się prostokątami pokrywającymi liczby -1. Prostokąty 1×8 pokrywają pola o sumie liczb równej 3, a więc dodatniej. Suma ta pozostanie dodatnia, jeśli dokonana przez nas korekta liczb wpisanych w pola kwadratu nie będzie zbyt duża. Z kolei prostokąty 1×11 pokrywają pola o sumie 0, w związku z czym musimy uważać, aby dokonywane zmiany nie zaburzyły tej sumy, a w każdym razie, aby nie uczyniły jej ujemną.

Wpiszmy w pola kwadratu liczby jak na rysunku 2, traktując puste pola jak pola z liczbą 0. Wówczas każdy prostokąt 1×11 narysowany po kratkach pokrywa pola o sumie liczb równej 0. Suma wszystkich liczb wpisanych w pola kwadratu na rysunku 2 jest równa –144.

Dodając do sześciokrotności liczb z rysunku 1 liczby korygujące z rysunku 2, a następnie dzieląc wszystkie otrzymane sumy przez 5, dochodzimy do rozwiązania zadania przedstawionego na rysunku 3.

-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	10	10	10	10	10	10	-70	10	10	10	10	10	10	10
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

rys. 1

-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
6	6	6	6	-4	-4	-4		-4	-4	-4	6	6	6	6
6	6	6	6	-4	-4	-4		-4	-4	-4	6	6	6	6
6	6	6	6	-4	-4	-4		-4	-4	-4	6	6	6	6
6	6	6	6	-4	-4	-4		-4	-4	-4	6	6	6	6
6	6	6	6	-4	-4	-4		-4	-4	-4	6	6	6	6
6	6	6	6	-4	-4	-4		-4	-4	-4	6	6	6	6
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9
-9	-9	-9	-9	6	6	6		6	6	6	-9	-9	-9	-9

rys. 2

-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
0	0	0	0	-2	-2	-2	12	-2	-2	-2	0	0	0	0
0	0	0	0	-2	-2	-2	12	-2	-2	-2	0	0	0	0
0	0	0	0	-2	-2	-2	12	-2	-2	-2	0	0	0	0
12	12	12	12	12	12	12	-84	12	12	12	12	12	12	12
0	0	0	0	-2	-2	-2	12	-2	-2	-2	0	0	0	0
0	0	0	0	-2	-2	-2	12	-2	-2	-2	0	0	0	0
0	0	0	0	-2	-2	-2	12	-2	-2	-2	0	0	0	0
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3
-3	-3	-3	-3	0	0	0	12	0	0	0	-3	-3	-3	-3

rys. 3

			-1				1							-1
-1							1				-1			
1			1				-1				1			1
			-1				1							-1
-1							1				-1			

rys. 4

Sposób II (Michał Adamaszek, z pomocą komputera): Wypełniamy pola kwadratu jak na rysunku 4. Przyjmujemy, że w puste pola wpisana jest liczba 0.