Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 128 (36/2017)

Piątek, 8 września 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **844–849** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

844. Zapisz liczbę 108 używając cyfr 1, 1, 2 i 8.

845. Zapisz liczbę 109 używając cyfr 1, 1, 2 i 8.

846. Zapisz liczbę 110 używając cyfr 1, 1, 2 i 8.

847. Zapisz liczbę 122 używając cyfr 1, 1, 2 i 8.

848. Zapisz liczbę 216 używając cyfr 1, 1, 2 i 8. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

849. Zapisz liczbę 336 używając cyfr 1, 1, 2 i 8.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

850. Zapisz wyrażenie

$$\frac{1}{1+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+4}$$

w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

851. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

852. Jaka cyfra występuje bezpośrednio po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2017} \;?$$

853. Dane są takie różne liczby całkowite dodatnie m i n, że liczba m^m jest podzielna przez n^n.

Czy stąd wynika, że liczba m jest większa od $1,01\cdot n$?

854. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Udowodnij, że istnieją co najmniej 2 pary takich liczb naturalnych m, n większych od 1, że

$$(m^n)^k=n^m\,.$$

Rozwiązania zadań 835–843

835. $45=\dfrac{(3!)!}{10+3!}$ **836.** $66=\dfrac{8!}{(3!)!}+10$ **837.** $99=9\cdot\sqrt{(3!-1)!+0!}$

838. Korzystając trzykrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b \qquad a+b\neq 0$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=2-1=1\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

839. Wykażemy, że liczba $41+29\sqrt{2}$ nie jest sumą kwadratów 2017 liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że

$$41+29\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{2017}\left(a_i+b_i\sqrt{2}\right)^2\,,$$

gdzie wszystkie liczby a_i oraz b_i są wymierne.

Przejście do algebraicznego sprzężenia powyższej równości daje

$$41-29\sqrt{2}=\sum_{i=1}^{2017}\left(a_i-b_i\sqrt{2}\right)^2\,,$$

co nie może zachodzić, gdyż prawa strona jest nieujemna jako suma kwadratów liczb rzeczywistych, a lewa jest ujemna, o czym można się przekonać następująco:

$$41-29\sqrt{2}=\sqrt{1681}-\sqrt{1682}<0\,.$$

Uwaga: Pewnego wyjaśnienia wymaga użyte w rozwiązaniu pojęcie *algebraicznego sprzężenia*. Zapewne Czytelnik kojarzy *sprzężenie* z liczbami zespolonymi. W dużym uproszczeniu: oparte jest ono na spostrzeżeniu, że liczby i oraz $-i$ są nieodróżnialne, to znaczy nie istnieje własność wyrażona w języku działań i liczb rzeczywistych, którą posiada jedna z tych liczb, a druga nie. Można byłoby więc w całej teorii zamienić konsekwentnie i na $-i$ i wszelakie rozważania pozostałyby w mocy. W szczególności nic by się nie zmieniło w zakresie czterech działań.

Liczby algebraicznie sprzężone to liczby będące pierwiastkami tego samego wielomiamu nierozkładalnego o współczynnikach całkowitych. Jeśli pomyślimy o wielomianie kwadratowym, to takie pierwiastki są dwa. Sprzężenie polega w tym wypadku na zamianie jednego pierwiastka na drugi. Jeśli przypomnimy sobie jak wyglądają rozwiązania równań kwadratowych, zobaczymy, że sprzężenie algebraiczne polega na konsekwentnej zmianie liczb postaci $a+b\sqrt{D}$, gdzie a i b są wymierne, a D jest liczbą naturalną nie będącą kwadratem, na $a-b\sqrt{D}$.

Przykładowo: liczby $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ są nieodróżnialne w zakresie czterech działań algebraicznych i wykorzystania liczb wymiernych. To, co je odróżnia, to analiza, czyli użycie nierówności — jedna z tych liczb jest dodatnia, a druga ujemna. Dopóki jednak używamy tylko liczb wymiernych i czterech działań, to wszelakie rachunki możemy przepisać zamieniając konsekwentnie $\sqrt{2}$ na $-\sqrt{2}$.

840. Nie wynika, np. dla $n=8$ i $m=12$ mamy

$$m^m=12^{12}=2^{24}\cdot 3^{12}=8^8\cdot 3^{12}=n^n\cdot 3^{12}\,.$$

841. Teza zadania wynika z ciągu równości

$$m^{n^{3^3}}=m^{n^{27}}=m^{n^{11+16}}=m^{n^{11}\cdot n^{16}}=\left(m^{n^{11}}\right)^{n^{16}}=\left(m^{n^{11}}\right)^{n^{2^{2^2}}}\,,$$

wobec czego wystarczy przyjąć

$$a=m^{n^{11}} \qquad \text{oraz} \qquad b=n\,.$$

842. Przykładami par liczb $(m\,,n)$ spełniających równanie

$$\left(\sqrt[m]{m}\right)^2=\sqrt[n]{n}$$

są

$$(16,\,2)\,,\qquad (16,\,4)\,,\qquad (27,\,9)\,.$$

843. Ponieważ równanie

$$(m^n)^2=n^m$$

jest równoważne równaniu z poprzedniego zadania, spełniają je te same trzy pary liczb $(m,\,n)$.