Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 129 (37/2017)
Piątek, 15 września 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **855**, **856** i **857** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

855. Zapisz liczbę 39 używając cyfr 2, 5 i 9 (każdej tylko raz).

856. Zapisz liczbę 74 używając cyfr 0, 1, 3 i 5 (każdej tylko raz).

857. Zapisz liczbę 85 używając cyfr 0, 1, 3 i 5 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

858. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

859. Jaka cyfra występuje bezpośrednio po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2018}\ ?$$

860. Interesują nas rozwiązania równania

$$m^{m^m}=2^{2^n}$$

w liczbach naturalnych m, n większych od 2.

Rozstrzygnij, czy:

a) takie rozwiązania nie istnieją,
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

861. Udowodnij istnienie takiej liczby naturalnej k większej od 1, że istnieje co najmniej 2017 par liczb naturalnych m, n większych od 1 spełniających równanie

$$(m^n)^k=n^m\,.$$

Rozwiązania zadań 844–854

844. $108=12\cdot(8+1)=18\cdot(1+2)!$ (drugie rozwiązanie podał Tomasz Pietrzak)

845. $109=\sqrt{\frac{12!}{8!}+1}$ **846.** $110=11\cdot(8+2)$ **847.** $122=\left(\left(\sqrt{8+1}\right)!-1\right)!+2$

848. $216=\left(\left(\sqrt{8+1}\right)!\right)^{1+2}=12\cdot 18$ **849.** $336=\dfrac{8!}{((1+2)!-1)!}$

850. Korzystając trzykrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b \qquad a+b\neq 0$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{1+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{11}+4}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{1+\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{5}{\sqrt{11}+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\left(\sqrt{6}-1\right)+\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)+\left(4-\sqrt{11}\right)\right)=\frac{1}{5}\cdot(4-1)=\frac{3}{5}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 3/5.

851. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$3\pm 2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^2, \qquad \sqrt{2}\pm 1>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2=\left(3-2\sqrt{2}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(3+2\sqrt{2}\right)=8\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{8}$.

852. Zapiszmy daną w zadaniu liczbę w postaci

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2017}=a+b\sqrt{2}\,,$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2017}=a-b\sqrt{2}\,,$$

skąd

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2017}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2017}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2017}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}=2a\,.$$

Ponieważ $2a$ jest liczbą całkowitą, a liczba $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$ jest dodatnia, przy czym

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2017}=\frac{1}{2^{2017}}<\frac{1}{2^4}<\frac{1}{10}\,,$$

wnioskujemy stąd, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2017}$ po przecinku występuje cyfra 0 (a nawet wiele zer, jeśli oszacować $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$ przez odwrotność wyższej potęgi dziesiątki).

853. Nie wynika, np. dla $n=k^{k+1}$ i $m=k^k\cdot(k+1)$ mamy

$$m^m=k^{k^{k+1}\cdot(k+1)}\cdot(k+1)^{k^k\cdot(k+1)}=n^n\cdot(k+1)^{k^k\cdot(k+1)}\,.$$

Dla zapewnienia nierówności $m\leqslant 1{,}01\cdot n$ wystarczy przyjąć $k\geqslant 100$.

854. Przykładami par liczb $(m\,,n)$ spełniających równanie

$$(m^n)^k=n^m$$

są

$$m=(k+1)^{k+1}\,, \qquad n=(k+1)^k$$

oraz

$$m=(2k)^2\,, \qquad n=2k\,.$$

Uwaga: Podane rozwiązania wyglądają na wyciągnięte "z kapelusza". Jakkolwiek sprawdzenie ich poprawności sprowadza się do wykonania automatycznych przekształceń, to do ich znalezienia trzeba było użyć jakiegoś rozumowania. Nie zdradzamy tego rozumowania, gdyż będzie ono przedstawione w rozwiązaniu zadania **861**.