Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 130 (38/2017)
Piątek, 22 września 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **862**, **863** i **864** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

862. Zapisz liczbę 32 używając cyfr 2, 7 i 8 (każdej tylko raz).

863. Zapisz liczbę 68 używając cyfr 2, 5 i 5.

864. Zapisz liczbę 91 używając cyfr 2, 3, 4 i 6 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

865. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

866. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

867. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m i n spełniające równanie
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^m=\left(1+2\sqrt{2}\right)^n .$$

868. Interesują nas rozwiązania równania
$$k^k=m^{m^{n^n}}$$
w liczbach naturalnych k, m, n większych od 1.

Rozstrzygnij, czy:

a) takie rozwiązania nie istnieją,
b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,
c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Rozwiązania zadań 855–861

855. $39=5!-9^2$ **856.** $74=50+(3+1)!$ **857.** $85=\dfrac{510}{3!}$

858. *Sposób I:* Zauważmy, że
$$7\pm4\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2, \qquad 2\pm\sqrt{3}>0 .$$
Wobec tego otrzymujemy
$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4 .$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:
$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2=\left(7-4\sqrt{3}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(7+4\sqrt{3}\right)=16 .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 4.

859. Zapiszmy daną w zadaniu liczbę w postaci
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2018}=a+b\sqrt{2} ,$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2018}=a-b\sqrt{2}\,,$$

skąd

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2018}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2018}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{2018}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}=2a\,.$$

Ponieważ $2a$ jest liczbą całkowitą, a liczba $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$ jest dodatnia, przy czym

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2018}=\frac{1}{2^{2018}}<\frac{1}{2^4}<\frac{1}{10}\,,$$

wnioskujemy stąd, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2018}$ po przecinku występuje cyfra 9 (a nawet wiele dziewiątek, jeśli oszacować $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$ przez odwrotność wyższej potęgi dziesiątki).

860. Wykażemy, że podane równanie

$$m^{m^m}=2^{2^n}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających określone w zadaniu warunki.

W tym celu dla dowolnej liczby naturalnej k przyjmijmy

$$m=2^{2^k}\,.$$

Wówczas lewa strona danego w zadaniu równania sprowadza się do postaci

$$\left(2^{2^k}\right)^{\left(2^{2^k}\right)^{2^{2^k}}}=2^{2^k\cdot\left(2^{2^k}\right)^{2^{2^k}}}=2^{2^k\cdot 2^{2^k\cdot 2^{2^k}}}=2^{2^{k+2^k\cdot 2^{2^k}}}=2^{2^{k+2^{k+2^k}}}\,,$$

a zatem wystarczy przyjąć

$$n=k+2^{k+2^k}\,.$$

861. Przyjmując w danym równaniu

$$(m^n)^k=n^m$$

$m=n^w$, gdzie w jest liczbą wymierną większą od 1, dochodzimy do równania

$$n^{wnk}=n^{n^w}\,,\qquad \text{czyli}\qquad k=\frac{n^{w-1}}{w}\,.$$

Oznaczając $w=1+s/t$, gdzie s, t są liczbami całkowitymi dodatnimi, otrzymujemy

$$k=t\cdot\frac{n^{s/t}}{t+s}\,,$$

co przy $s=1$ przybiera postać

$$k=t\cdot\frac{n^{1/t}}{t+1}\,.$$

Pozostaje zauważyć, że jeżeli t jest dzielnikiem liczby k, to powyższe równanie jest spełnione przez

$$n=\left((t+1)\cdot\frac{k}{t}\right)^t\,,$$

co prowadzi do

$$m=\left((t+1)\cdot\frac{k}{t}\right)^{t+1}\,.$$

Dla uzyskania rozwiązania zadania wystarczy przyjąć liczbę k mającą co najmniej 2017 dzielników.