Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 131 (39/2017)
Piątek, 29 września 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **869–874** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

869. Zapisz liczbę 131 używając cyfr 0, 1, 3 i 9 (każdej tylko raz).

870. Zapisz liczbę 131 używając cyfr 1, 1, 7 i 9.

871. Zapisz liczbę 131 używając cyfr 1, 7, 7 i 9.

872. Zapisz liczbę 131 używając cyfr 2, 4, 4 i 6.

873. Zapisz liczbę 131 używając cyfr 4, 4, 5 i 8. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

874. Zapisz liczbę 131 używając cyfr 5, 6 i 6.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

875. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{11+2\sqrt{30}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

876. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

877. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^m=\left(1+2\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{3}\right)^k.$$

878. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k>1$, dla których równanie

$$(m^m)^k=n^n$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych m, n większych od 1.

Rozwiązania zadań 862–868

862. $32=\sqrt{8\cdot 2^7}=\sqrt{\sqrt{\frac{8^7}{2}}}$ **863.** $68=5!-52$ **864.** $91=\sqrt{\sqrt{2^{4!}}}+\sqrt{3^6}=2^6+4!+3$

865. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$9\pm4\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}\pm2\right)^2, \qquad \sqrt{5}\pm2>0.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\cdot\sqrt{5}=\sqrt{20}.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2=\left(9-4\sqrt{5}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(9+4\sqrt{5}\right)=20.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{20}$.

866. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$5\pm2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2, \qquad \sqrt{3}\pm\sqrt{2}>0.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2=\left(5-2\sqrt{6}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(5-2\sqrt{6}\right)=12\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{12}$.

867. Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^m=\left(1+2\sqrt{2}\right)^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m i n.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Przejście do algebraicznego sprzężenia tego równania daje

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^m=\left(1-2\sqrt{2}\right)^n\,,$$

co nie może zachodzić, gdyż wobec nierówności

$$\left|1-\sqrt{2}\right|<1$$

oraz

$$\left|1-2\sqrt{2}\right|>1$$

lewa strona jest bezwzględnie mniejsza od 1, a prawa bezwzględnie większa od 1.

868. Wykażemy, że podane równanie

$$k^k=m^{m^{n^n}}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań spełniających określone w zadaniu warunki.

W tym celu dla dowolnej liczby naturalnej $n>1$ przyjmijmy $m=n^n-1$ oraz $k=m^m$.

Wówczas

$$k^k=(m^m)^{m^m}=m^{m\cdot m^m}=m^{m^{m+1}}=m^{m^{n^n}}\,,$$

skąd wynika, że każda trójka liczb $(k,\,m,\,n)$ określonych podanymi wyżej wzorami jest rozwiązaniem równania danego w treści zadania.

Można łatwo sprawdzić, że nie wszystkie rozwiązania dają się uzyskać w opisany wyżej sposób, gdyż rozwiązaniem jest także trójka liczb $k=5^{25}$, $m=5$, $n=3$.

Uwaga:

Aby dojść do podanego rozwiązania przyjmujemy $k=m^t$, co sprowadza dane w zadaniu równanie do postaci

$$\left(m^t\right)^{m^t}=m^{m^{n^n}}\,,$$

a to upraszcza się do

$$t\cdot m^t=m^{n^n}\,.$$

Przyjmując $t=m^x$ otrzymujemy

$$m^x\cdot m^{m^x}=m^{n^n}\,,$$

co daje

$$x+m^x=n^n\,.$$

Podana w rozwiązaniu rodzina trójek spełniających dane w zadaniu równanie jest otrzymana dla $x=1$.