Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 132 (40/2017)

Piątek, 6 października 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **879**, **880** i **881** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

879. Zapisz liczbę 14 używając cyfr 5, 8 i 8. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

880. Zapisz liczbę 74 używając cyfr 1, 4, 4 i 5. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

881. Zapisz liczbę 19 używając cyfr 0, 6, 7 i 8 (każdej tylko raz). Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

882. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

883. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(3+\sqrt{5}\right)^k .$$

884. Znajdź takie liczby naturalne a, b, c, d, e, f większe od 1, że $a<c<e$ oraz

$$a^{a^b}=c^{c^d}=e^{e^f} .$$

885. Podaj przykład takich liczb naturalnych m, n, k, x, y większych od 1, że

$$\left(\sqrt[m]{m}\right)^x=\sqrt[n]{n}$$

oraz

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^y=\sqrt[k]{k} .$$

Rozwiązania zadań 869–878

869. $131=\sqrt{\frac{13!}{9!}+0!}$ **870.** $131=(1+1)^7+\sqrt{9}$ **871.** $131=\frac{917}{7}$

872. $131=\frac{4^4+6}{2}$ **873.** $131=\frac{4^5+4!}{8}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{5^{4!}}}}+8-\sqrt{4}$ **874.** $131=\sqrt{5^6}+6$

875. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$11\pm 2\sqrt{30}=\left(\sqrt{6}\pm\sqrt{5}\right)^2, \qquad \sqrt{6}\pm\sqrt{5}>0 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{6}=\sqrt{24} .$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{11+2\sqrt{30}}\right)^2=\left(11-2\sqrt{30}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(11+2\sqrt{30}\right)=24 .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{24}$.

876. Zauważmy, że

$$3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2, \qquad \sqrt{2}-1>0,$$

$$5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2, \qquad \sqrt{3}-\sqrt{2}>0,$$

$$7-4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2, \qquad 2-\sqrt{3}>0.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=2-1=1.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

877. Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^m=\left(1+2\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{3}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Przejście do algebraicznego sprzężenia tego równania daje

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^m=\left(1-2\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(1-3\sqrt{3}\right)^k,$$

co nie może zachodzić, gdyż wobec nierówności

$$\left|1-\sqrt{3}\right|<1, \qquad \left|1-2\sqrt{3}\right|>1 \qquad \text{oraz} \qquad \left|1-3\sqrt{3}\right|>1$$

lewa strona jest bezwzględnie mniejsza od 1, a prawa bezwzględnie większa od 1.

878. Zapiszmy dane równanie jako

$$m^{mk}=n^n.$$

Jeżeli dwie potęgi są równe, to podstawy tych potęg są potęgami tej samej liczby. Możemy więc przyjąć $m=a^x$ oraz $n=a^y$. Ponieważ $m<n$, mamy także $x<y$, a przy tym $a>1$. Rozważane równanie przyjmuje postać

$$a^{xka^x}=a^{ya^y},$$

co po zlogarytmowaniu przy podstawie a prowadzi do

$$xka^x=ya^y,$$

czyli

$$kx=ya^{y-x}.$$

Dla $k=2$ powyższe równanie przyjmuje postać

$$2x=ya^{y-x},$$

jednak z uwagi na nierówności $x<y$ oraz $2\leqslant a^{y-x}$ mamy

$$2x<ya^{y-x},$$

co pokazuje, że dla $k=2$ dane w zadaniu równanie nie ma rozwiązań.

Natomiast w przypadku, gdy $k>2$, otrzymujemy rozwiązanie przyjmując $x=a=k-1$ oraz $y=k$.