Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 133 (41/2017)

Piątek, 13 października 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **886**, **887** i **888** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

886. Zapisz liczbę 198 używając cyfr 3, 4, 4 i 5. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

887. Zapisz liczbę 202 używając cyfr 3, 4, 4 i 5.

888. Zapisz liczbę 273 używając cyfr 3, 4, 4 i 5.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

889. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

890. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

891. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(1+2\sqrt{5}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{5}\right)^k .$$

892. Znajdź takie liczby naturalne a, b, c, d, e, f, g, h większe od 1, że $a<c<e<g$ oraz

$$a^{a^b}=c^{c^d}=e^{e^f}=g^{g^h} .$$

Rozwiązania zadań 879–885

879. $14=(8-5)!+8=\dfrac{5!-8}{8}$

880. $74=5!-\sqrt{4}\cdot(4!-1)=\dfrac{5!}{\sqrt{4}}+14=14\cdot5+4$

Trzecie rozwiązanie zadania **880** podał Władysław Daleczko.

881. $19=6+7+\left(\sqrt{8+0!}\right)!=\sqrt{\dfrac{7!}{6+8}+0!}=\dfrac{6!}{8}-\sqrt{7!+0!}$

882. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$2\pm\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6} .$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(2+\sqrt{3}\right)=6 .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{6}$.

883. Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(3+\sqrt{5}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Przejście do algebraicznego sprzężenia tego równania daje

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^m=\left(2-\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^k,$$

co nie może zachodzić, gdyż wobec nierówności

$$\left|1-\sqrt{5}\right|>1,$$

$$\left|2-\sqrt{5}\right|<1$$

oraz

$$\left|3-\sqrt{5}\right|<1$$

prawdziwe są następujące nierówności:

$$\left|1-\sqrt{5}\right|^m\geqslant\left|1-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-1>1=\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(3-\sqrt{5}\right)=\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|2-\sqrt{5}\right|^n+\left|3-\sqrt{5}\right|^k\geqslant\left|\left(2-\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^k\right|,$$

czyli

$$\left|1-\sqrt{5}\right|^m>\left|\left(2-\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^k\right|.$$

884. Przyjmijmy $c=a^a$. Wówczas

$$c^{c^d}=a^{a\cdot a^{ad}}=a^{a^{1+ad}},$$

skąd wynika, że $b=1+ad$. Podobnie, zakładając $e=c^c$ dochodzimy do $d=1+cf$. Niech $a=f=2$. Wówczas

$$c=4,\quad e=256,\quad d=9,\quad b=19.$$

W konsekwencji

$$2^{2^{19}}=4^{4^9}=256^{256^2}.$$

885. Szukając rozwiązań danego w zadaniu układu równań

$$\left(\sqrt[m]{m}\right)^x=\sqrt[n]{n},\qquad\left(\sqrt[n]{n}\right)^y=\sqrt[k]{k}$$

przyjmijmy

$$m=2^{2^a},\qquad n=2^{2^b},\qquad k=2^{2^c},$$

gdzie $a>b>c$ są liczbami całkowitymi dodatnimi. Wówczas

$$\sqrt[m]{m}=2^{2^{a-2^a}},\qquad\sqrt[n]{n}=2^{2^{b-2^b}},\qquad\sqrt[n]{n}=2^{2^{c-2^c}}$$

oraz

$$x=\frac{2^{b-2^b}}{2^{a-2^a}}=2^{2^a-a-2^b+b}\qquad\text{i}\qquad y=\frac{2^{c-2^c}}{2^{b-2^b}}=2^{2^b-b-2^c+c}.$$

W szczególności przyjmując $a=3$, $b=2$, $c=1$ otrzymujemy

$$m=256,\qquad n=16,\qquad k=4,\qquad x=8,\qquad y=2.$$