Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 134 (42/2017)
Piątek, 20 października 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **893**, **894** i **895** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

893. Zapisz liczbę 26 używając cyfr 0, 3, 7 i 7.

894. Zapisz liczbę 34 używając cyfr 0, 3, 7 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

895. Zapisz liczbę 72 używając cyfr 0, 7 i 7.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

896. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

897. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

898. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(1+\sqrt{7}\right)^{m}=\left(4+\sqrt{7}\right)^{n}\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)^{k}.$$

899. Znajdź takie liczby naturalne a, b, c, d większe od 1, że $a<c$ oraz

$$a^{a^{b^{b}}}=c^{c^{d^{d}}}.$$

900. Znajdź takie liczby naturalne a, b, c, d większe od 1, że $a<c$ oraz

$$a^{a^{b^{b^{b}}}}=c^{c^{d^{d^{d}}}}.$$

Rozwiązania zadań 886–892

886. $198=3!\cdot(4!+4+5)=(5!-4!+3)\cdot\sqrt{4}=4!\cdot3!+54$

Trzecie rozwiązanie zadania **886** podał Władysław Daleczko.

887. $202=\sqrt{4}\cdot\left(5^3-4!\right)$

888. $273=3\cdot(4!\cdot4-5)$

889. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$4\pm\sqrt{15}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}>0.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2=\left(4-\sqrt{15}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(4+\sqrt{15}\right)=10.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{10}$.

890. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$6\pm\sqrt{35}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^2=\left(6-\sqrt{35}\right)+2\cdot\sqrt{1}+\left(6+\sqrt{35}\right)=14\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{14}$.

891. Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^m=\left(1+2\sqrt{5}\right)^n\cdot\left(1+3\sqrt{5}\right)^k \tag{1}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Przejście do algebraicznego sprzężenia tego równania daje

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^m=\left(1-2\sqrt{5}\right)^n\cdot\left(1-3\sqrt{5}\right)^k,$$

co po przemnożeniu stronami przez równość (1) prowadzi do równania

$$(-4)^m=(-19)^n\cdot(-44)^k,$$

które nie ma rozwiązań, gdyż dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i k jego prawa strona jest podzielna przez 19, a lewa nie.

892. Przyjmijmy $c=a^a$. Wówczas

$$c^{c^d}=a^{a\cdot a^{ad}}=a^{a^{1+ad}},$$

skąd wynika, że $b=1+ad$. Podobnie, zakładając $e=c^c$ dochodzimy do $d=1+cf$, a założenie $g=e^e$ prowadzi do $f=1+eh$. Niech $a=h=2$. Wówczas

$$c=4\,,\quad e=256\,,\quad g=2^{2048}\,,\quad f=513\,,\quad d=2053\,,\quad b=4107\,.$$

Uwagi: Wnikliwy Czytelnik bez trudu zauważy, że powyższa metoda pozwala udowodnić istnienie liczby naturalnej, którą można przedstawić w postaci m^{m^n}, gdzie m i n są liczbami naturalnymi większymi od 1, na co najmniej 2017 sposobów.

Możliwa jest modyfikacja powyższej konstrukcji, co prawda nieco ją komplikująca, ale pokazująca, że mamy sporo swobody w konstruowaniu rozmaitych rozwiązań. Otóż przyjmując $c=a^{a^k}$ otrzymujemy

$$c^{c^d}=a^{a^k\cdot a^{a^k\cdot d}}=a^{a^{k+a^k\cdot d}},$$

skąd $b=k+a^k\cdot d$.