Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 135 (43/2017)
Piątek, 27 października 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **901**, **902** i **903** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

901. Zapisz liczbę 45 używając cyfr 1, 1, 2 i 7.

902. Zapisz liczbę 82 używając cyfr 0, 0, 5 i 7.

903. Zapisz liczbę 101 używając cyfr 0, 3, 5 i 8 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

904. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

905. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

906. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n i k spełniające równanie

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^k .$$

Rozwiązania zadań 893–900

893. $26=\dfrac{77+0!}{3}$

894. $34=\sqrt{7!+0!}-37=\sqrt{3^{7-0!}}+7=3!\cdot 7-7-0!$

Trzecie rozwiązanie zadania **894** podał Władysław Daleczko.

895. $72=\dfrac{7!}{70}$

896. Zauważmy, że

$$2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}>0,$$

$$4-\sqrt{15}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}>0,$$

$$6-\sqrt{35}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}>0,$$

$$8-3\sqrt{7}=\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}>0.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)=\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{2}$.

897. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$3\pm\sqrt{5}=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2=\left(3-\sqrt{5}\right)+2\cdot\sqrt{4}+\left(3+\sqrt{5}\right)=10\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{10}$.

898. Wykażemy, że równanie

$$\left(1+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(5+\sqrt{7}\right)^k \tag{1}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Przejście do algebraicznego sprzężenia tego równania daje

$$\left(1-\sqrt{7}\right)^m=\left(4-\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(5-\sqrt{7}\right)^k,$$

co po przemnożeniu stronami przez równość (1) prowadzi do równania

$$(-6)^m=9^n\cdot 18^k,$$

skąd

$$6^m=9^n\cdot 18^k\,. \tag{2}$$

Jednak równanie (2) nie ma rozwiązań, gdyż dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich m, n i k jego lewa strona ma w rozkładzie na czynniki pierwsze tyle samo dwójek, co trójek, podczas gdy po prawej stronie występuje więcej trójek niż dwójek.

899. Przyjmijmy $c=a^a$. Wówczas

$$c^{c^{d^d}}=a^{a\cdot a^{ad^d}}=a^{a^{1+ad^d}},$$

skąd wynika, że $b^b=1+ad^d$, a ponieważ liczba $a>1$ może być wybrana dowolnie, wystarczy zapewnić warunki

$$b^b\equiv 1\left(\bmod\ d^d\right) \qquad \text{oraz} \qquad b^b>1+d^d\,.$$

Przyjmując $d=2$ oraz $b=5$ otrzymujemy $a=781$ i $c=781^{781}$.

900. Przyjmijmy $c=a^a$. Wówczas

$$c^{c^{d^{d^d}}}=a^{a\cdot a^{ad^{d^d}}}=a^{a^{1+ad^{d^d}}},$$

skąd wynika, że $b^{b^b}=1+ad^{d^d}$, a ponieważ liczba $a>1$ może być wybrana dowolnie, wystarczy zapewnić warunki

$$b^{b^b}\equiv 1\left(\bmod\ d^{d^d}\right) \qquad \text{oraz} \qquad b^{b^b}>1+d^{d^d}\,.$$

Przyjmując $d=2$ oraz $b=17$ otrzymujemy $a=\dfrac{17^{17}-1}{16}$ oraz $c=a^a$.