Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 136 (44/2017)
Piątek, 3 listopada 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **907**, **908** i **909** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

907. Zapisz liczbę 57 używając cyfr 1, 1, 3 i 4.

908. Zapisz liczbę 67 używając cyfr 1, 4, 5 i 5.

909. Zapisz liczbę 101 używając cyfr 3, 4, 4 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

910. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[4]{12\sqrt[3]{2}-15}+1$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

911. Udowodnij, że równanie

$$(m^m\cdot n^n)^2=k^k$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n, k.

Rozwiązania zadań 901–906

901. $45=\dfrac{7!}{112}$ **902.** $82=\sqrt{7!+0!}+\sqrt{5!+0!}$ **903.** $101=\dfrac{(3!)!}{8}+\sqrt{5!+0!}$

904. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$4\pm\sqrt{7}=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2, \qquad \sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{7}{2}}=\sqrt{14}\,.$$

Sposób II: Podnosząc daną w treści zadania liczbę do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2=\left(4-\sqrt{7}\right)+2\cdot\sqrt{9}+\left(4+\sqrt{7}\right)=14\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{14}$.

905. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$7\pm5\sqrt{2}=\left(1\pm\sqrt{2}\right)^3\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}=1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu zgodnie ze wzorem $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$ otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3=$$

$$=\left(7-5\sqrt{2}\right)+3\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot\left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)+\left(7+5\sqrt{2}\right)=14-3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3+3x-14=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=2$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 2.

906. Wykażemy, że równanie

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^m=\left(4+\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^k \tag{1}$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich m, n i k.

W tym celu przeprowadzimy dowód nie wprost i założymy, że rozwiązanie powyższego równania istnieje.

Przejście do algebraicznego sprzężenia tego równania daje

$$\left(5-\sqrt{7}\right)^m=\left(4-\sqrt{7}\right)^n\cdot\left(1-\sqrt{7}\right)^k\,,$$

co po przemnożeniu stronami przez równość (1) prowadzi do równania

$$18^m=9^n\cdot(-6)^k\,,$$

skąd

$$18^m=9^n\cdot 6^k\,. \tag{2}$$

W celu rozwiązania równania (2) porównujemy rozkłady obu jego stron na czynniki pierwsze:

$$2^m\cdot 3^{2m}=3^{2n}\cdot 2^k\cdot 3^k\,,$$

co sprowadza się do układu równań

$$\left\{\begin{array}{lcl} m & = & k \\ 2m & = & 2n+k \end{array}\right. \tag{3}$$

Układ (3) ma rozwiązania $m=k=2n$, co po wstawieniu do równania (1) i wyciągnięciu pierwiastka n-tego stopnia daje

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^2=\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^2\,. \tag{4}$$

Jednak równość (4) nie jest prawdziwa, gdyż

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^2<\left(5+\sqrt{9}\right)^2=8^2=64$$

oraz

$$\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(1+\sqrt{7}\right)^2=\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(8+2\sqrt{7}\right)>\left(4+\sqrt{4}\right)\cdot\left(8+\sqrt{25}\right)=6\cdot 13=78>64\,.$$