Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 137 (45/2017)

Piątek, 10 listopada 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **912**, **913** i **914** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

912. Zapisz liczbę 95 używając cyfr 3, 5, 7 i 7.

913. Zapisz liczbę 164 używając cyfr 1, 4, 5 i 8 (każdej tylko raz).

914. Zapisz liczbę 193 używając cyfr 4, 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

915. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[5]{99-45\sqrt[3]{10}+1}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

916. Interesują nas rozwiązania równania

$$(m^m\cdot n^n)^2=k^k$$

w takich liczbach całkowitych dodatnich m, n, k, że liczba k nie jest podzielna ani przez m, ani przez n.

Rozstrzygnij, czy:

a) takie rozwiązania nie istnieją,

b) takie rozwiązania istnieją, ale jest ich skończenie wiele,

c) takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Rozwiązania zadań 907–911

Ostatnie dwa rozwiązania zadania **909** podał Adam Dzedzej.

907. $57=4!+11\cdot 3$ **908.** $67=5!-54+1$

909. $101=\sqrt{4^7}-4!-3=\left(7-\sqrt{4}\right)^3-4!=37+\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}}=74+3+4!$

910. Zauważmy, że

$$12\sqrt[3]{2}-15=\left(\sqrt[3]{4}-1\right)^4, \qquad \sqrt[3]{4}-1>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[4]{12\sqrt[3]{2}-15}+1=\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)^4}+1=\sqrt[3]{4}-1+1=\sqrt[3]{4}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt[3]{4}$.

911. Przyjmijmy, że $k=2n$. Wówczas dane w zadaniu równanie

$$(m^m\cdot n^n)^2=k^k$$

sprowadza się do

$$m^{2m}\cdot n^{2n}=2^{2n}\cdot n^{2n}\,,$$

czyli

$$m^m=2^n\,.$$

Jeżeli m jest potęgą dwójki, powiedzmy $m=2^q$, to

$$m^m=2^{q\cdot 2^q}\,,$$

skąd wynika, że można przyjąć $n=q\cdot 2^q$ oraz $k=q\cdot 2^{q+1}$.

Odpowiedź: Przykładem nieskończonej rodziny rozwiązań danego równania jest

$$m=2^q\,, \qquad n=q\cdot 2^q\,, \qquad k=q\cdot 2^{q+1}\,,$$

gdzie q przebiega liczby całkowite dodatnie.

Uwaga: Podana rodzina nie wyczerpuje wszystkich rozwiązań danego równania. W poniższej tabeli przytaczamy wybrane rozwiązania.

m	n	k			m/k	n/k	Uwagi
2	$1\cdot 2$	$1\cdot 2^2$	$=$	4	$1/2$	$1/2$	$q=1$
2^2	$2\cdot 2^2$	$2\cdot 2^3$	$=$	16	$1/4$	$1/2$	$q=2$
2^3	$3\cdot 2^3$	$3\cdot 2^4$	$=$	48	$1/6$	$1/2$	$q=3$
3^3	3^3	3^4	$=$	81	$1/3$	$1/3$	
2^4	$4\cdot 2^4$	$4\cdot 2^5$	$=$	128	$1/8$	$1/2$	$q=4$
2^5	$5\cdot 2^5$	$5\cdot 2^6$	$=$	320	$1/10$	$1/2$	$q=5$
2^6	$6\cdot 2^6$	$6\cdot 2^7$	$=$	768	$1/12$	$1/2$	$q=6$
2^7	$7\cdot 2^7$	$7\cdot 2^8$	$=$	1792	$1/14$	$1/2$	$q=7$
2^8	$8\cdot 2^8$	$8\cdot 2^9$	$=$	4096	$1/16$	$1/2$	$q=8$
$2^6\cdot 3^3$	$2^4\cdot 3^4$	$2^6\cdot 3^4$	$=$	5184	$1/3$	$1/4$	
2^9	$9\cdot 2^9$	$9\cdot 2^{10}$	$=$	9216	$1/18$	$1/2$	$q=9$
2^{10}	$10\cdot 2^{10}$	$10\cdot 2^{11}$	$=$	20480	$1/20$	$1/2$	$q=10$
2^{11}	$11\cdot 2^{11}$	$11\cdot 2^{12}$	$=$	45056	$1/22$	$1/2$	$q=11$
2^{12}	$12\cdot 2^{12}$	$12\cdot 2^{13}$	$=$	98304	$1/24$	$1/2$	$q=12$
2^{13}	$13\cdot 2^{13}$	$13\cdot 2^{14}$	$=$	212992	$1/26$	$1/2$	$q=13$
2^{14}	$14\cdot 2^{14}$	$14\cdot 2^{15}$	$=$	458752	$1/28$	$1/2$	$q=14$
2^{15}	$15\cdot 2^{15}$	$15\cdot 2^{16}$	$=$	983040	$1/30$	$1/2$	$q=15$
2^{16}	$16\cdot 2^{16}$	$16\cdot 2^{17}$	$=$	2097152	$1/32$	$1/2$	$q=16$
2^{17}	$17\cdot 2^{17}$	$17\cdot 2^{18}$	$=$	4456448	$1/34$	$1/2$	$q=17$
2^{18}	$18\cdot 2^{18}$	$18\cdot 2^{19}$	$=$	9437184	$1/36$	$1/2$	$q=18$
2^{19}	$19\cdot 2^{19}$	$19\cdot 2^{20}$	$=$	19922944	$1/38$	$1/2$	$q=19$
2^{20}	$20\cdot 2^{20}$	$20\cdot 2^{21}$	$=$	41943040	$1/40$	$1/2$	$q=20$
$2^7\cdot 7^7$	$2^4\cdot 7^8$	$2^6\cdot 7^8$	$=$	368947264	$2/7$	$1/4$	
$3^9\cdot 5^6$	$3^{10}\cdot 5^5$	$3^{10}\cdot 5^6$	$=$	922640625	$1/3$	$1/5$	
$2^{32}\cdot 3^8$	$2^{36}\cdot 3^6$	$2^{36}\cdot 3^7$	$=$	$150\ldots$ (15 cyfr)	$3/16$	$1/3$	
$3^{15}\cdot 17^{18}$	$3^{17}\cdot 17^{17}$	$3^{16}\cdot 17^{18}$	$=$	$605\ldots$ (30 cyfr)	$1/3$	$3/17$	

Komentarz: Patrząc na powyższe rozwiązania nietrudno zauważyć, że w każdym z nich liczba k jest podzielna przez m lub przez n. Reguła czy przypadek? Tego właśnie dotyczy zadanie **916**.