Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 138 (46/2017)
Piątek, 17 listopada 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **917**, **918** i **919** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

917. Zapisz liczbę 27 używając cyfr 1, 4 i 5 (każdej tylko raz).

918. Zapisz liczbę 79 używając cyfr 0, 2, 5 i 7 (każdej tylko raz).

919. Zapisz liczbę 138 używając cyfr 1, 3 i 4 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

920. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

921. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

922. Zapisz wyrażenie
$$\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$
w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

Rozwiązania zadań 912–916

912. $95=\frac{(3!)!}{5}-7\cdot 7$ **913.** $164=4\cdot(8\cdot 5+1)$ **914.** $193=\frac{(3!)!}{5}+\sqrt{7^4}=5!-4!+97$

Drugie rozwiązanie zadania **914** podał Władysław Daleczko.

915. Zauważmy, że
$$99-45\sqrt[3]{10}=\left(\sqrt[3]{10}-1\right)^5 .$$
Wobec tego otrzymujemy
$$\sqrt[5]{99-45\sqrt[3]{10}}+1=\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{10}-1\right)^5}+1=\sqrt[3]{10}-1+1=\sqrt[3]{10}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt[3]{10}$.

916. Wykażemy, że rozwiązań spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele.

Przyjmując $d=\mathrm{NWD}(m, n, k)$ oraz $a=m/d$, $b=n/d$ i $c=k/d$ otrzymujemy odpowiednio
$$m=ad, \qquad n=bd \qquad \text{oraz} \qquad k=cd\,.$$
Wówczas dane w zadaniu równanie
$$(m^m\cdot n^n)^2=k^k$$

przyjmuje kolejno postać

$$\left((ad)^{ad}\cdot(bd)^{bd}\right)^2=(cd)^{cd}\,,$$

$$a^{2ad}\cdot b^{2bd}\cdot d^{2ad+2bd}=c^{cd}\cdot d^{cd}\,,$$

$$a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot d^{2a+2b}=c^{c}\cdot d^{c}\,,$$

$$d^{2a+2b-c}=\frac{c^c}{a^{2a}\cdot b^{2b}}\,,$$

$$d=\left(\frac{c^c}{a^{2a}\cdot b^{2b}}\right)^{1/(2a+2b-c)}\,.$$

Podstawienie

$$p=2^t-1\,,\qquad a=p^2,\qquad b=(p+1)^2=2^{2t}\quad\text{oraz}\quad c=4p(p+1)\,,$$

gdzie t jest liczbą naturalną większą od 1, prowadzi do

$$\frac{c^c}{a^{2a}\cdot b^{2b}}=4^{4p(p+1)}\cdot p^{4p(p+1)-4p^2}\cdot(p+1)^{4p(p+1)-4(p+1)^2}=4^{4p(p+1)}\cdot p^{4p}\cdot(p+1)^{-4(p+1)}=$$

$$=4^{4p(p+1)}\cdot p^{4p}\cdot 2^{-4t(p+1)}=p^{4p}\cdot 2^{-4t(p+1)}\cdot 2^{8p(p+1)}=p^{4p}\cdot 2^{(8p-4t)\cdot(p+1)}=p^{4p}\cdot 2^{(2^{t+3}-8-4t)\cdot 2^t}$$

oraz $2a+2b-c=2$. W konsekwencji

$$d=\left(\frac{c^c}{a^{2a}\cdot b^{2b}}\right)^{1/2}=p^{2p}\cdot 2^{(2^{t+3}-8-4t)\cdot 2^{t-1}}=p^{2p}\cdot 2^{(2^{t+1}-2-t)\cdot 2^{t+1}}\,.$$

Otrzymaliśmy więc następującą rodzinę rozwiązań:

$$m=ad=p^{2p+2}\cdot 2^{(2^{t+1}-2-t)\cdot 2^{t+1}}\,,\qquad n=bd=p^{2p}\cdot 2^{2t+(2^{t+1}-2-t)\cdot 2^{t+1}}\,,$$

$$k=cd=p^{2p+1}\cdot 2^{t+2+(2^{t+1}-2-t)\cdot 2^{t+1}}\,,$$

gdzie $p=2^t-1$, a t przebiega liczby naturalne większe od 1.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że dla $t>2$ liczby $k/m=c/a$ oraz $k/n=c/b$ nie są całkowite, a zatem liczba k nie jest podzielna ani przez m, ani przez n.

Uwagi: W poniższej tabeli przytaczamy rozwiązania odpowiadające $t=2,3,4,5$.

m	n	k	m/k	n/k	Uwagi
$2^{32}\cdot 3^8$	$2^{36}\cdot 3^6$	$2^{36}\cdot 3^7$ = 150… (15 cyfr)	3/16	1/3	$t=2$
$2^{176}\cdot 7^{16}$	$2^{182}\cdot 7^{14}$	$2^{181}\cdot 7^{15}$ = 145… (68 cyfr)	7/32	2/7	$t=3$
$2^{832}\cdot 15^{32}$	$2^{840}\cdot 15^{30}$	$2^{838}\cdot 15^{31}$ = 527… (289 cyfr)	15/64	4/15	$t=4$
$2^{3648}\cdot 31^{64}$	$2^{3658}\cdot 31^{62}$	$2^{3655}\cdot 31^{63}$ = 166… (1195 cyfr)	31/128	8/31	$t=5$

Inne rozwiązanie spełniające warunki zadania otrzymujemy dla

$$a=25,\qquad b=96,\qquad c=240\,.$$

Jest ono następujące:

$$m=3^{24}\cdot 5^{72},\qquad n=2^5\cdot 3^{25}\cdot 5^{70},\qquad k=2^4\cdot 3^{25}\cdot 5^{71}\ \text{(63 cyfry)}\,.$$