Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 139 (47/2017)
Piątek, 24 listopada 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **923**, **924** i **925** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

923. Zapisz liczbę 43 używając cyfr 0, 4, 5 i 6 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

924. Zapisz liczbę 44 używając cyfr 1, 1, 3 i 6.

925. Zapisz liczbę 139 używając cyfr 0, 2, 3 i 7 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

926. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{12-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\sqrt{12+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\sqrt{12-4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}-\sqrt{12+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

927. Udowodnij, że równanie

$$m^m\cdot n^n=k^k$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych m, n, k większych od 1.

Rozwiązania zadań 917–922

917. $27=51-4!$ **918.** $79=2+7\cdot\sqrt{5!+0!}$ **919.** $138=3!\cdot(4!-1)$

920. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$17\pm12\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\pm1\right)^4, \qquad \sqrt{2}\pm1>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-1\right)^4}+\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do czwartej potęgi korzystając ze wzoru

$$(a+b)^4=a^4+4\cdot ab\cdot\left(a^2+b^2\right)+6\cdot(ab)^2+b^4\,,$$

otrzymujemy:

$$x^4=\left(\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}\right)^4=$$

$$=\left(17-12\sqrt{2}\right)+4\cdot\sqrt[4]{1}\cdot\left(\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)+6\cdot\sqrt{1}+\left(17+12\sqrt{2}\right)=$$

$$=34+4y+6=40+4y\,,$$

gdzie

$$y=\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}\,.$$

Ponieważ

$$y^2=\left(\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}\right)^2=\left(17-12\sqrt{2}\right)+2\sqrt{1}+\left(17+12\sqrt{2}\right)=36\,,$$

otrzymujemy $y=6$ i w konsekwencji

$$x^4=64\,.$$

Sposób III: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do kwadratu otrzymujemy:

$$x^2=\left(\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt{17-12\sqrt{2}}+2\cdot\sqrt{1}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}\,,$$

a ponieważ ze Sposobu II wiemy, że

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}=6\,,$$

otrzymujemy $x^2=8$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{8}$.

921. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$26\pm15\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^3\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)^3=$$

$$=\left(26-15\sqrt{3}\right)+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\right)+\left(26+15\sqrt{3}\right)=52+3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3-3x-52=0\,.$$

Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $x=4$, a ponadto

$$x^3-3x-52=(x-4)\cdot\left(x^2+4x+13\right)\,,$$

gdzie trójmian kwadratowy w drugim nawiasie nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 4.

922. Zauważmy, że

$$63\sqrt[3]{20}-171=\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)^6, \qquad \sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[6]{7\sqrt[3]{20}-19}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[6]{\frac{63\sqrt[3]{20}-171}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[6]{\frac{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)^6}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt[3]{5/3}$.