Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 140 (48/2017)

Piątek, 1 grudnia 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **928–933** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

928. Zapisz liczbę 140 używając cyfr 1, 2, 3 i 5 (każdej tylko raz).

929. Zapisz liczbę 280 używając trzech czwórek.

930. Zapisz liczbę 420 używając cyfr 1, 1, 2 i 9.

931. Zapisz liczbę 560 używając cyfr 1, 9 i 9.

932. Zapisz liczbę 700 używając cyfr 3, 5, 7 i 7.

933. Zapisz liczbę 840 używając cyfr 2, 4 i 8 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

934. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[5]{41-29\sqrt{2}}+\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

935. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

936. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{6+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

Rozwiązania zadań 923–927

923. $43=\dfrac{5!}{6}+4!-0!=6\cdot\left(5+\sqrt{4}\right)+0!$ **924.** $44=\dfrac{(3!)!}{16}-1$ **925.** $139=2\cdot\sqrt{7!+0!}-3$

926. Zauważmy, że

$$12-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2, \qquad 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}>0\,,$$

$$12+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2, \qquad 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}>0\,,$$

$$12-4\sqrt{2}+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2, \qquad 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}>0\,,$$

$$12+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}=\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2, \qquad -1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{12-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\sqrt{12+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\sqrt{12-4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}-\sqrt{12+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=$$
$$=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)+\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)+\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)-$$
$$-\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)=4\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 4.

927. Przyjmując $d=$NWD(m, n, k) oraz $a=m/d$, $b=n/d$ i $c=k/d$ otrzymujemy odpowiednio

$$m=ad, \qquad n=bd \qquad \text{oraz} \qquad k=cd\,.$$

Wówczas dane w zadaniu równanie

$$m^m\cdot n^n=k^k$$

przyjmuje kolejno postać

$$(ad)^{ad}\cdot(bd)^{bd}=(cd)^{cd}\,,$$

$$a^{ad}\cdot b^{bd}\cdot d^{ad+bd}=c^{cd}\cdot d^{cd}\,,$$

$$a^a\cdot b^b\cdot d^{a+b}=c^c\cdot d^c\,,$$

$$d^{a+b-c}=\frac{c^c}{a^a\cdot b^b}\,,$$

$$d=\left(\frac{c^c}{a^a\cdot b^b}\right)^{1/(a+b-c)}\,.$$

Podstawienie

$$p=2^t-1\,, \qquad a=p^2, \qquad b=(p+1)^2=2^{2t} \quad \text{oraz} \quad c=2p(p+1)\,,$$

gdzie t jest liczbą naturalną większą od 1, prowadzi do

$$\frac{c^c}{a^a\cdot b^b}=2^{2p(p+1)}\cdot p^{2p(p+1)-2p^2}\cdot(p+1)^{2p(p+1)-2(p+1)^2}=2^{2p(p+1)}\cdot p^{2p}\cdot(p+1)^{-2(p+1)}=$$

$$=2^{2p(p+1)}\cdot p^{2p}\cdot 2^{-2t(p+1)}=p^{2p}\cdot 2^{-2t(p+1)}\cdot 2^{2p(p+1)}=p^{2p}\cdot 2^{(2p-2t)\cdot(p+1)}=p^{2p}\cdot 2^{(2^{t+1}-2-2t)\cdot 2^t}$$

oraz $a+b-c=1$. W konsekwencji

$$d=p^{2p}\cdot 2^{(2^{t+1}-2-2t)\cdot 2^t}\,.$$

Otrzymaliśmy więc następującą rodzinę rozwiązań:

$$m=ad=p^{2p+2}\cdot 2^{(2^{t+1}-2-2t)\cdot 2^t}\,, \qquad n=bd=p^{2p}\cdot 2^{2t+(2^{t+1}-2-2t)\cdot 2^t}\,,$$

$$k=cd=p^{2p+1}\cdot 2^{t+1+(2^{t+1}-2-2t)\cdot 2^t}\,,$$

gdzie $p=2^t-1$, a t przebiega liczby naturalne większe od 1.

Uwaga: W poniższej tabeli przytaczamy rozwiązania odpowiadające $t=2,3,4,5$.

t	a	b	c	m	n	k		
2	9	16	24	$2^8\cdot 3^8$	$2^{12}\cdot 3^6$	$2^{11}\cdot 3^7$	=	4478976
3	49	64	112	$2^{64}\cdot 7^{16}$	$2^{70}\cdot 7^{14}$	$2^{68}\cdot 7^{15}$	=	140… (34 cyfry)
4	225	256	480	$2^{352}\cdot 15^{32}$	$2^{360}\cdot 15^{30}$	$2^{357}\cdot 15^{31}$	=	844… (144 cyfry)
5	961	1024	1984	$2^{1664}\cdot 31^{64}$	$2^{1674}\cdot 31^{62}$	$2^{1670}\cdot 31^{63}$	=	474… (597 cyfr)