Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 141 (49/2017)
Piątek, 8 grudnia 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **937**, **938** i **939** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

937. Zapisz liczbę 1024 używając cyfr 0, 2 i 4 (każdej tylko raz).

938. Zapisz liczbę 1294 używając cyfr 2, 9 i 4 (każdej tylko raz).

939. Zapisz liczbę 1704 używając cyfr 7, 0 i 4 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

940. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

941. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{12+3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}+\sqrt{12-3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}+\sqrt{12+3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}+\sqrt{12-3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

942. Udowodnij, że równanie

$$m^m\cdot n^n=k^{k^2}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych m, n, k większych od 1.

Rozwiązania zadań 928–936

928. $140=\dfrac{(3!)!+5!}{(1+2)!}$ **929.** $280=4^4+4!$ **930.** $420=\dfrac{21!}{19!}$

931. $560=\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!+1\right)!}{9}$ **932.** $700=\dfrac{7!}{7}-\dfrac{5!}{3!}=\left(7-\dfrac{7}{3!}\right)\cdot 5!$

933. $840=\dfrac{8!}{4!\cdot 2}$

Drugie rozwiązanie zadania **932** podał Remigiusz Suwalski.

934. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$41\pm 29\sqrt{2}=\left(1\pm\sqrt{2}\right)^5 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[5]{41-29\sqrt{2}}+\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}=\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}+\sqrt[5]{\left(1+\sqrt{2}\right)^5}=1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do potęgi piątej korzystając ze wzoru

$$(a+b)^5=a^5+b^5+5\cdot ab\cdot\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\right)=a^5+b^5+5\cdot ab\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=$$
$$=a^5+b^5+5\cdot ab\cdot(a+b)\cdot\left((a+b)^2-ab\right)$$

otrzymujemy:

$$x^5=\left(\sqrt[5]{41-29\sqrt{2}}+\sqrt[5]{41+29\sqrt{2}}\right)^5=$$

$$=\left(41-29\sqrt{2}\right)+\left(41+29\sqrt{2}\right)+5\cdot\sqrt[5]{-1}\cdot x\cdot\left(x^2-\sqrt[5]{-1}\right)=82-5x\cdot\left(x^2+1\right)=$$
$$=82-5x^3-5x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie $x^5+5x^3+5x-82=0$. Ponieważ lewa strona tego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=2$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 2.

935. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$9\pm4\sqrt{5}=\left(\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=3\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)^3=$$
$$=\left(9-4\sqrt{5}\right)+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)+\left(9+4\sqrt{5}\right)=18+3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3-3x-18=0\,.$$

Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $x=3$, a ponadto

$$x^3-3x-18=(x-3)\cdot\left(x^2+3x+6\right)\,,$$

gdzie trójmian kwadratowy w drugim nawiasie nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 3.

936. Zauważmy, że

$$24+8\sqrt{3}+4\sqrt{5}=\left(-1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2,\qquad -1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}>0\,,$$
$$24-8\sqrt{3}+4\sqrt{5}=\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2,\qquad 1+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{15}>0\,,$$
$$24+8\sqrt{3}-4\sqrt{5}=\left(1-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2,\qquad 1-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}>0\,,$$
$$24-8\sqrt{3}-4\sqrt{5}=\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}\right)^2,\qquad 1+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{6+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{3}-\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}-$$
$$-\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2}=2\sqrt{15}=\sqrt{60}\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{60}$.