Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 142 (50/2017)
Piątek, 15 grudnia 2017 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **943**, **944** i **945** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

943. Zapisz liczbę 1440 używając cyfr 1, 4 i 4.

944. Zapisz liczbę 1680 używając cyfr 1, 6 i 8 (każdej tylko raz).

945. Zapisz liczbę 2520 używając cyfr 2, 5 i 2.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

946. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

947. Udowodnij, że równanie

$$m^m\cdot n^n=k^{k^3}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych m, n, k większych od 1.

948. Udowodnij, że równanie

$$m^n\cdot n^m=k^k$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych m, n, k większych od 1.

Rozwiązania zadań 937–942

937. $1024=\sqrt{\sqrt{2^{40}}}$ **938.** $1294=\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)^4-2$ **939.** $1704=4!\cdot\sqrt{7!+0!}$

940. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$2\pm\sqrt{5}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=1\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3=$$

$$=\left(2-\sqrt{5}\right)+3\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)+\left(2+\sqrt{5}\right)=4-3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3+3x-4=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=1$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

941. Zauważmy, że

$$48+12\sqrt{5}+8\sqrt{7}=\left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35}\right)^2, \qquad -1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35}>0,$$

$$48-12\sqrt{5}+8\sqrt{7}=\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}\right)^2, \qquad 1+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}>0,$$

$$48+12\sqrt{5}-8\sqrt{7}=\left(1-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35}\right)^2, \qquad 1-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35}>0,$$

$$48-12\sqrt{5}-8\sqrt{7}=\left(-1-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}\right)^2, \qquad -1-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}>0,$$

gdzie nieoczywistą nierówność $-1-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}>0$ dowodzimy następującymi przejściami równoważnymi:

$$\sqrt{35}-1>\sqrt{5}+\sqrt{7}, \qquad 36-2\sqrt{35}>12+2\sqrt{35}, \qquad 24>4\sqrt{35}, \qquad 6>\sqrt{35}.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{12+3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}+\sqrt{12-3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}+\sqrt{12+3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}+\sqrt{12-3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35}}{2}+$$

$$+\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{35}}{2}=2\sqrt{35}=\sqrt{140}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{140}$.

942. Podnosząc stronami do kwadratu dane w zadaniu równanie $m^m\cdot n^n=k^{k^2}$ otrzymujemy

$$m^{2m}\cdot n^{2n}=\left(k^2\right)^{k^2}, \tag{1}$$

co sprowadza się do równania

$$(m^m\cdot n^n)^2=k^k \tag{2}$$

z zadań **911** i **916** zamieszczonych i rozwiązanych w **Trapezach 136–138**, z dodatkowym warunkiem, że niewiadoma k w równaniu (2) jest kwadratem liczby całkowitej.

Jak wiemy, równanie (2) ma rozwiązanie

$$m=2^q, \qquad n=q\cdot 2^q, \qquad k=q\cdot 2^{q+1},$$

które prowadzi do rozwiązania

$$m=2^q, \qquad n=q\cdot 2^q, \qquad k^2=q\cdot 2^{q+1},$$

równania (1), o ile q jest kwadratem liczby nieparzystej lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

W konsekwencji otrzymujemy następujące dwie rodziny rozwiązań równania (1):

$$m=2^{p^2}, \quad n=p^2\cdot 2^{p^2}, \quad k=p\cdot 2^{(p^2+1)/2}, \qquad (q=p^2,\ 2\nmid p)$$

$$m=2^{2p^2}, \quad n=p^2\cdot 2^{2p^2+1}, \quad k=p\cdot 2^{p^2+1}, \qquad (q=2p^2)$$

Oprócz tego istnieją też inne rozwiązania, na przykład:

$$m=n=27, \qquad k=9,$$

$$m=2^6\cdot 3^3, \qquad n=2^4\cdot 3^4, \qquad k=2^3\cdot 3^2,$$

$$m=2^7\cdot 7^7, \qquad n=2^4\cdot 7^8, \qquad k=2^3\cdot 7^4,$$

$$m=3^9\cdot 5^6, \qquad n=3^{10}\cdot 5^5, \qquad k=3^5\cdot 5^3,$$

$$m=3^{15}\cdot 17^{18}, \qquad n=3^{17}\cdot 17^{17}, \qquad k=3^8\cdot 17^9.$$