Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 143 (51/2017)
Piątek, 22 grudnia 2017 r.

Łamigłówki i zadania na Święta

W łamigłówkach **949–954** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

949. Zapisz liczbę 126 używając cyfr 1, 2 i 5 (każdej tylko raz).

950. Zapisz liczbę 840 używając cyfr 8, 3 i 9 (każdej tylko raz).

951. Zapisz liczbę 1331 używając cyfr 1, 3, 3 i 0.

952. Zapisz liczbę 2401 używając cyfr 2, 4, 0 i 0.

953. Zapisz liczbę 2187 używając cyfr 2, 1, 8 i 6 (każdej tylko raz).

954. Zapisz liczbę 2197 używając cyfr 2, 1, 9 i 6 (każdej tylko raz).

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

955. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka sześciennego z liczby wymiernej.

956. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Udowodnij, że istnieją takie liczby naturalne m, n większe od 1, że

$$m^{n^k}=n^m\,.$$

957. Udowodnij istnienie nieskończenie wielu liczb naturalnych k większych od 1, dla których istnieją co najmniej 2 pary liczb naturalnych m, n większych od 1 spełniających równanie

$$m^{n^k}=n^m\,.$$

Rozwiązania zadań 943–948

943. $1440=((4-1)!)!\cdot\sqrt{4}$ **944.** $1680=\dfrac{8!}{\left(\sqrt{16}\right)!}$ **945.** $2520=\dfrac{(2+5)!}{2}$

946. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$2\sqrt{7}\pm3\sqrt{3}=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{7}\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\right)^3=$$

$$=\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{3}\right)+3\cdot\sqrt[3]{1}\cdot\left(\sqrt[3]{2\sqrt{7}-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}\right)+\left(2\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)=4\sqrt{7}+3x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^3-3x-4\sqrt{7}=0\,.$$

Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $x=\sqrt{7}$, a ponadto

$$x^3-3x-4\sqrt{7}=\left(x-\sqrt{7}\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{7}x+4\right)\,,$$

gdzie trójmian kwadratowy w drugim nawiasie nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt{7}$.

947. Podnosząc stronami do sześcianu dane w zadaniu równanie

$$m^m\cdot n^n=k^{k^3}$$

otrzymujemy

$$m^{3m}\cdot n^{3n}=\left(k^3\right)^{k^3}\,, \tag{1}$$

co jest równoważne równaniu

$$(m^m\cdot n^n)^3=K^K \tag{2}$$

z dodatkowym założeniem, że K jest sześcianem liczby całkowitej.

Samo równanie (2) ma rodzinę rozwiązań

$$m=3^q\,,\qquad n=q\cdot 3^q\,,\qquad K=q\cdot 3^{q+1}\,,$$

które prowadzą do rozwiązań

$$m=3^q\,,\qquad n=q\cdot 3^q\,,\qquad k^3=q\cdot 3^{q+1}\,,$$

równania (1), o ile q jest postaci $9p^3$ (przy dowolnym p) lub postaci p^3, gdzie $p\equiv 2 \pmod 3$.

W konsekwencji otrzymujemy następujące dwie rodziny rozwiązań równania (1):

$$m=3^{p^3}\,,\quad n=p^3\cdot 3^{p^3}\,,\quad k=p\cdot 3^{(p^3+1)/3}\,,\qquad (q=p^3,\ p\equiv 2 \pmod 3)$$

$$m=3^{9p^3}\,,\qquad n=p^3\cdot 3^{9p^3+2}\,,\qquad k=p\cdot 3^{3p^3+1}\,,\qquad (q=9p^3)$$

Oprócz tego istnieje też wiele innych rozwiązań, na przykład:

$$m=n=16,\qquad k=4\,,$$

$$m=n=5^5,\qquad k=5^2\,,$$

$$m=2^{18},\qquad n=2^{19},\qquad k=2^7\,,$$

$$m=2^{34}\cdot 5^6,\qquad n=2^{35}\cdot 5^5,\qquad k=2^{12}\cdot 5^2\,,$$

$$m=5^{20}\cdot 7^{15},\qquad n=5^{21}\cdot 7^{14},\qquad k=5^7\cdot 7^5\,,$$

$$m=2^{376}\cdot 191^{192},\qquad n=2^{382}\cdot 191^{191},\qquad k=2^{126}\cdot 191^{64}\,.$$

948. Równanie

$$m^n\cdot n^m=k^k$$

jest spełnione przez

$$m=p^{p-1},\qquad n=k=p^p\,,$$

gdzie p jest liczbą naturalną większą od 1.

Inna rodzina rozwiązań to

$$m=(p+1)^p\cdot p^{p^2-p},\qquad n=(p+1)^{p+1}\cdot p^{p^2-p-2},\qquad k=(p+1)^{p+1}\cdot p^{p^2-p-1}\,.$$