Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

# TRAPEZ

**Nr 144 (52/2017)**
**Piątek, 29 grudnia 2017 r.**

## Łamigłówki i zadania na Nowy Rok

W łamigłówkach **958–975** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

**958.** Zapisz liczbę 33 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**959.** Zapisz liczbę 39 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**960.** Zapisz liczbę 45 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**961.** Zapisz liczbę 55 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**962.** Zapisz liczbę 89 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**963.** Zapisz liczbę 109 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**964.** Zapisz liczbę 252 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**965.** Zapisz liczbę 266 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**966.** Zapisz liczbę 380 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**967.** Zapisz liczbę 440 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**968.** Zapisz liczbę 990 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**969.** Zapisz liczbę 1025 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**970.** Zapisz liczbę 1260 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**971.** Zapisz liczbę 1320 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**972.** Zapisz liczbę 1919 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**973.** Zapisz liczbę 2017 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**974.** Zapisz liczbę 5000 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

**975.** Zapisz liczbę 8100 używając cyfr 2, 0, 1 i 8 (każdej tylko raz).

## Zabawy z pierwiastkami i potęgami

**976.** Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[5]{11-5\sqrt{5}}+\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

**977.** Udowodnij, że równanie

$$m^{n^{k^2}}=n^{m^{\ell^2}}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $m$, $n$, $k$, $\ell$ większych od 1, spełniających warunek $k\neq\ell$.

## Rozwiązania zadań 949–957

**949.** $126=5!+(1+2)!$

**950.** $840=(3!)!+\left(8-\sqrt{9}\right)!$

**951.** $1331=\sqrt{((3!-0!)!+1)^3}$

**952.** $2401=((2+0!)!+0!)^4$

**953.** $2187=\sqrt{(2+1)^{8+6}}=\left(\frac{6}{2}\right)^{8-1}$

**954.** $2197=(6\cdot 2+1)^{\sqrt{9}}$

**955.** *Sposób I:* Zauważmy, że

$$10\pm 6\sqrt{3}=\left(1\pm\sqrt{3}\right)^3 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\frac{10-6\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{10+6\sqrt{3}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}{2}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}\,.$$

*Sposób II:* Oznaczając przez $x$ daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:

$$x^3=\left(\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}\right)^3=$$

$$=\left(5-3\sqrt{3}\right)+3\cdot\sqrt[3]{-2}\cdot\left(\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}\right)+\left(5+3\sqrt{3}\right)=10-3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot x\,.$$

Szukana wartość liczby $x$ spełnia więc równanie

$$x^3+3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot x-10=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od $x$, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=\sqrt[3]{4}$.

*Odpowiedź:* Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt[3]{4}$.

**956.** Przykładem pary liczb $(m\,,n)$ spełniającej równanie

$$m^{n^k}=n^m$$

jest

$$m=(k+1)^{k+1}\,,\qquad n=k+1\,.$$

**957.** Podstawiając $m=n^{n^t}$ w danym równaniu

$$m^{n^k}=n^m$$

otrzymujemy

$$n^{n^{t+k}}=n^{n^{n^t}}\,,$$

skąd

$$k=n^t-t\,.$$

Jeżeli $k+2$ jest kwadratem liczby całkowitej, to oprócz rozwiązania podanego w poprzednim zadaniu (odpowiadającego $t=1$) istnieje rozwiązanie odpowiadające $t=2$, a mianowicie

$$n=\sqrt{k+2},\qquad m=n^{n^2}=n^{k+2}\,.$$

Ogólniej, jeśli dla pewnego $t>1$ liczba $\sqrt[t]{k+t}$ jest całkowita, to dane równanie jest spełnione przez

$$n=\sqrt[t]{k+t},\qquad m=n^{n^t}=n^{k+t}\,.$$