Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **978**, **979** i **980** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

978. Zapisz liczbę 844 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

979. Zapisz liczbę 944 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

980. Zapisz liczbę 1681 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 145 (1/2018)
Piątek, 5 stycznia 2018 r.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

981. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt{15+\sqrt{88+48\sqrt{2}}}+\sqrt{15+\sqrt{88-48\sqrt{2}}}+\sqrt{15-\sqrt{88+48\sqrt{2}}}-\sqrt{15-\sqrt{88-48\sqrt{2}}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka kwadratowego z liczby wymiernej.

982. Udowodnij, że równanie

$$m^n\cdot n^m=k^k$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych $m<k<n$ większych od 1.

Rozwiązania zadań 958–977

958. $33=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{80}}}}}+1$ **959.** $39=\dfrac{80}{2}-1$ **960.** $45=\dfrac{10!}{8!\cdot 2}$

961. $55=\dfrac{8!}{((1+2)!)!}-0!$ **962.** $89=\dfrac{((1+2)!)!}{8}-0!$ **963.** $109=\sqrt{\dfrac{12!}{8!}+0!}$

964. $252=\dfrac{(8-1)!}{20}$ **965.** $266=2^8+10$ **966.** $380=\dfrac{20!}{18!}$

967. $440=\sqrt{\sqrt{21^8}}-0!$ **968.** $990=\dfrac{(12-0!)!}{8!}$ **969.** $1025=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{80}}}}+1$

970. $1260=\dfrac{8!}{\sqrt{2^{10}}}$ **971.** $1320=\dfrac{12!}{(8+0!)!}$ **972.** $1919=\dfrac{8!}{21}-0!$

973. $2017=\dfrac{8!}{20}+1$ **974.** $5000=\dfrac{\sqrt{10^8}}{2}$ **975.** $8100=\left(\dfrac{10!}{8!}\right)^2$

976. *Sposób I:* Zauważmy, że

$$176\pm 80\sqrt{5}=\left(1\pm\sqrt{5}\right)^5 .$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt[5]{11-5\sqrt{5}}+\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}=\sqrt[5]{\frac{176-80\sqrt{5}}{16}}+\sqrt[5]{\frac{176+80\sqrt{5}}{16}}=\sqrt[5]{\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^5}{16}}+\sqrt[5]{\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^5}{16}}=$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{\sqrt[5]{16}}=\frac{2}{\sqrt[5]{16}}=\sqrt[5]{2}\,.$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do potęgi piątej korzystając ze wzoru

$$(a+b)^5=a^5+b^5+5\cdot ab\cdot\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3\right)=a^5+b^5+5\cdot ab\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=$$
$$=a^5+b^5+5\cdot ab\cdot(a+b)\cdot\left((a+b)^2-ab\right)$$

otrzymujemy:

$$x^5=\left(\sqrt[5]{11-5\sqrt{5}}+\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}\right)^5=$$
$$=\left(11-5\sqrt{5}\right)+\left(11+5\sqrt{5}\right)+5\cdot\sqrt[5]{-4}\cdot x\cdot\left(x^2-\sqrt[5]{-4}\right)=22-5\cdot\sqrt[5]{4}\cdot x\cdot\left(x^2+\sqrt[5]{4}\right)=$$
$$=22-5\cdot\sqrt[5]{4}\cdot x^3-5\cdot\sqrt[5]{16}\cdot x\,.$$

Szukana wartość liczby x spełnia więc równanie

$$x^5+5\cdot\sqrt[5]{4}\cdot x^3+5\cdot\sqrt[5]{16}\cdot x-22=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=\sqrt[5]{2}$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa $\sqrt[5]{2}$.

977. Podstawiając $m=n^n$ w danym równaniu

$$m^{n^{k^2}}=n^{m^{\ell^2}}$$

otrzymujemy

$$n^{n^{k^2+1}}=n^{n^{n\cdot\ell^2}}\,,$$

czyli

$$k^2+1=n\cdot\ell^2\,,$$

skąd

$$n=\frac{k^2+1}{\ell^2}\,.$$

Przyjmując $\ell=5$ oraz $k=25t+7$, gdzie t jest liczbą całkowitą nieujemną, dostajemy

$$n=\frac{(25t+7)^2+1}{25}=\frac{625t^2+14\cdot25t+49+1}{25}=25t^2+14t+2\,.$$

Przykładowe rozwiązanie otrzymane dla $t=0$ jest następujące:

$$n=2\,,\quad m=4\,,\quad k=7\,,\quad \ell=5\,.$$

Wówczas

$$m^{n^{k^2}}=4^{2^{7^2}}=2^{2^{50}}\quad\text{oraz}\quad n^{m^{\ell^2}}=2^{4^{5^2}}=2^{2^{50}}\,.$$

Inne rodziny rozwiązań (nie wszystkie, rzecz jasna) otrzymamy przyjmując:

$$\begin{array}{llll}
\ell=5 \ \text{oraz}\ k=25t-7\,, & t\geqslant1\,, & & \\
\ell=13 \ \text{oraz}\ k=169t\pm70\,, & t\geqslant1 & \text{oraz} & t=0,\ \pm=+\,,\\
\ell=17 \ \text{oraz}\ k=289t\pm38\,, & t\geqslant1 & \text{oraz} & t=0,\ \pm=+\,,\\
\ell=29 \ \text{oraz}\ k=841t\pm41\,, & t\geqslant1 & \text{oraz} & t=0,\ \pm=+\,.
\end{array}$$