Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **983**, **984** i **985** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

983. Zapisz liczbę 399 używając cyfr 4, 4, 5 i 5.

984. Zapisz liczbę 576 używając cyfr 4, 6 i 6. Podaj dwa istotnie rózne rozwiązania.

985. Zapisz liczbę 1347 używając cyfr 5, 9 i 9.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 146 (2/2018)
Piątek, 12 stycznia 2018 r.

Zabawy z pierwiastkami i potęgami

986. Zapisz wyrażenie

$$\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}$$

w postaci liczby całkowitej, ułamka nieskracalnego lub pierwiastka całkowitego stopnia z liczby wymiernej.

987. Znajdź takie liczby naturalne a, b, c, d większe od 1, że $a<c$ oraz

$$a^{b^a}=c^{d^c}\,.$$

988. Znajdź takie liczby naturalne a, b, c, d, e, f większe od 1, że $a<c<e$ oraz

$$a^{b^a}=c^{d^c}=e^{f^e}\,.$$

Rozwiązania zadań 978–982

978. $844=\frac{7!}{3!}+4$ **979.** $944=7!-4^{3!}$ **980.** $1681=7^4-(3!)!$

981. Zauważmy, że

$$88\pm48\sqrt{2}=\left(6\sqrt{2}\pm4\right)^2, \qquad 6\sqrt{2}\pm4>0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy

$$\sqrt{15+\sqrt{88+48\sqrt{2}}}+\sqrt{15+\sqrt{88-48\sqrt{2}}}+\sqrt{15-\sqrt{88+48\sqrt{2}}}-\sqrt{15-\sqrt{88-48\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{15+\left(6\sqrt{2}+4\right)}+\sqrt{15+\left(6\sqrt{2}-4\right)}+\sqrt{15-\left(6\sqrt{2}+4\right)}-\sqrt{15-\left(6\sqrt{2}-4\right)}=$$

$$=\sqrt{19+6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}\,.$$

Na podstawie zależności

$$11\pm6\sqrt{2}=\left(3\pm\sqrt{2}\right)^2, \qquad 3\pm\sqrt{2}>0$$

oraz

$$19\pm6\sqrt{2}=\left(3\sqrt{2}\pm1\right)^2, \qquad 3\sqrt{2}\pm1>0$$

możemy kontynuować przekształcenia:

$$\sqrt{19+6\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{19-6\sqrt{2}}=$$

$$=\left(3\sqrt{2}+1\right)+\left(3+\sqrt{2}\right)+\left(3-\sqrt{2}\right)-\left(3\sqrt{2}-1\right)=8\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 8.

982. Przyjmując $d=$NWD(m, n, k) oraz $a=m/d$, $b=n/d$ i $c=k/d$ otrzymujemy odpowiednio

$$m=ad, \qquad n=bd \qquad \text{oraz} \qquad k=cd\,.$$

Wówczas dane w zadaniu równanie

$$m^n\cdot n^m=k^k \tag{1}$$

przyjmuje kolejno postać

$$(ad)^{bd}\cdot(bd)^{ad}=(cd)^{cd}\,,$$

$$a^{bd}\cdot b^{ad}\cdot d^{ad+bd}=c^{cd}\cdot d^{cd}\,,$$

$$a^b\cdot b^a\cdot d^{a+b}=c^c\cdot d^c\,,$$

$$d^{a+b-c}=\frac{c^c}{a^b\cdot b^a}\,,$$

$$d=\left(\frac{c^c}{a^b\cdot b^a}\right)^{1/(a+b-c)}\,.$$

Przeszukując przy użyciu komputera trójki liczb (a, b, c) spełniające nierówności $a<c<b$, znajdujemy następujące trójki (a, b, c) prowadzące do rozwiązań równania (1):

$$(1, 8, 4)\,, \quad (1, 8, 6)\,, \quad (1, 512, 504)\,, \quad (1, 512, 510)\,, \quad (1, 1024, 1020)\,.$$

To nasuwa pomysł, aby przyjąć

$$a=1\,, \qquad b=2^s, \qquad c=2^s-2^t\,.$$

Wobec tego

$$d=\left(\frac{c^c}{a^b\cdot b^a}\right)^{1/(a+b-c)}=\left(\frac{2^{ct}\cdot(2^{s-t}-1)^c}{2^s}\right)^{1/(2^t+1)}=\left(2^{ct-s}\cdot\left(2^{s-t}-1\right)^{2^t\cdot(2^{s-t}-1)}\right)^{1/(2^t+1)}=$$

$$=2^{(2^t\cdot(2^{s-t}-1)\cdot t-s)/(2^t+1)}\cdot\left(2^{s-t}-1\right)^{2^t\cdot(2^{s-t}-1)/(2^t+1)}\,.$$

Powyższa liczba jest całkowita, jeżeli

$$2^t\cdot(2^{s-t}-1)\cdot t-s\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^t+1\right) \qquad \text{oraz} \qquad 2^t\cdot(2^{s-t}-1)\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^t+1\right)\,,$$

czyli

$$s\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^t+1\right) \qquad \text{oraz} \qquad 2^{s-t}-1\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^t+1\right)\,.$$

Ostatnia kongruencja jest równoważna temu, że s/t jest liczbą całkowitą nieparzystą.

Podsumowując: liczba t może być dowolną liczbą całkowitą dodatnią, natomiast

$$s=u\cdot\mathrm{NWW}\left(t,\, 2^t+1\right)\,,$$

gdzie u jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą nieparzystą.

Przykładowe rozwiązania:
Dla $(a, b, c)=(1, 8, 4)$ otrzymujemy $d=2$ oraz $(m, n, k)=(2, 16, 8)$.
Dla $(a, b, c)=(1, 8, 6)$ otrzymujemy $d=18$ oraz $(m, n, k)=(18, 144, 108)$.