Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 147 (3/2018)

Piątek, 19 stycznia 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **989**, **990** i **991** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

989. Zapisz liczbę 7 używając trzech czwórek.

990. Zapisz liczbę 28 używając cyfr 2, 3 i 3.

991. Zapisz liczbę 39 używając cyfr 4, 7 i 9 (każdej tylko raz).

Środki ciężkości

Reguły zabawy ze środkami ciężkości:

W celu rozwiązania zadania możemy dowolnie rozmieścić dowolne masy punktowe. Środek ciężkości dwóch mas punktowych leży na odcinku łączącym punkty, w których umieszczone są te masy, w odległościach odwrotnie proporcjonalnych do poszczególnych mas. Położenie środka ciężkości układu kilku mas nie zmieni się, jeśli pewne dwie z tych mas przesuniemy do środka ciężkości obu mas.

992. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji są one dzielone przez punkt przecięcia?

Ważenie monet

Reguły ważenia monet na wadze szalkowej:

Waga ma dwie szalki. W jednym ważeniu na każdą szalkę możemy położyć dowolną liczbę dowolnie wybranych monet. Waga wskaże, na której szalce jest większy ciężar albo wskaże, że masy monet na obu szalkach są równe.

993. Mamy trzy identycznie wyglądające monety. Wiemy, że jedna z tych monet jest fałszywa (lżejsza od prawdziwych). Jak przy pomocy jednego ważenia na wadze szalkowej wykryć monetę fałszywą?

994. Mamy dziewięć identycznie wyglądających monet. Wiemy, że jedna z tych monet jest fałszywa (lżejsza od prawdziwych). Jak przy pomocy dwóch ważeń na wadze szalkowej wykryć monetę fałszywą?

Rozwiązania zadań 983–988

983. $399=4^5-5^4$ **984.** $576=6^4-6!=6!-6\cdot 4!$ **985.** $1347=\sqrt{9!\cdot 5+9}$

986. *Sposób I:* Zauważmy, że
$$38\pm 17\sqrt{5}=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9 .$$
Wobec tego otrzymujemy
$$\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt[9]{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9}+\sqrt[9]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^9}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=1 .$$

Sposób II: Oznaczając przez x daną w treści zadania liczbę i podnosząc ją do sześcianu otrzymujemy:
$$x^3=\left(\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}\right)^3=$$
$$=\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}+3\cdot\sqrt[9]{-1}\cdot\left(\sqrt[9]{38-17\sqrt{5}}+\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}\right)+\sqrt[9]{38+17\sqrt{5}}=y-3x ,$$
gdzie
$$y=\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} .$$

Podniesienie powyższej równości stronami do sześcianu daje

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}\right)^3 =$$

$$= \left(38-17\sqrt{5}\right) + 3\cdot\sqrt[3]{-1}\cdot\left(\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}\right) + \left(38+17\sqrt{5}\right) = 76-3y\,,$$

skąd

$$y^3+3y-76=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od y, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Zauważmy, że równanie to jest spełnione przez $y=4$. Wobec tego szukana wartość liczby x spełnia równanie

$$x^3+3x-4=0\,.$$

Ponieważ lewa strona powyższego równania zależy rosnąco od x, równanie to ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. Pozostaje zauważyć, że równanie to jest spełnione przez $x=1$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu liczba jest równa 1.

987. Przyjmijmy $a=2^s$ oraz $c=2^t$. Wówczas dane w zadaniu równanie

$$a^{b^a}=c^{d^c}$$

przybiera postać

$$2^{sb^{2^s}}=2^{td^{2^t}}\,,$$

czyli

$$sb^{2^s}=td^{2^t}\,.$$

Przyjmując $s=1$ otrzymujemy

$$b^2=td^{2^t}\,,$$

co ma rozwiązanie, o ile t jest kwadratem liczby całkowitej. Niech więc $t=4$, co prowadzi do równania

$$b^2=4d^{16}\,.$$

Przy $d=2$ otrzymujemy $b=512$, a ponadto z wcześniejszych założeń wynika $a=2$ i $c=16$. W konsekwencji otrzymujemy równość

$$2^{512^2}=16^{2^{16}}\,.$$

988. Rozumując jak w zadaniu poprzednim z dodatkowym założeniem $e=2^u$ dochodzimy do

$$b^2=4d^{16}=uf^{2^u}\,,$$

co dla $u=2^{18}$ daje

$$b^2=4d^{16}=2^{18}\cdot f^{2^{2^{18}}}\,.$$

Przyjmując $f=2$ otrzymujemy kolejno:

$$d=2^{1+2^{2^{18}-4}},\qquad b=2^{9+2^{2^{18}-1}},\qquad a=2\,,\qquad c=16\,,\qquad e=2^{2^{18}}.$$

Nietrudno sprawdzić, że wówczas

$$a^{b^a}=c^{d^c}=e^{f^e}=2^{2^{18+2^{18}}}\,.$$