Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1007**, **1008** i **1009** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1007. Zapisz liczbę 75 używając cyfr 3, 7 i 9 (każdej tylko raz).

1008. Zapisz liczbę 76 używając cyfr 3, 4 i 9 (każdej tylko raz).

1009. Zapisz liczbę 82 używając cyfr 3, 4 i 8 (każdej tylko raz).

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 149 (5/2018)
Piątek, 2 lutego 2018 r.

Środki ciężkości

1010. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie odcinki łączące punkty styczności okręgu wpisanego z przeciwległymi wierzchołkami przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji są one dzielone przez punkt przecięcia?

Ważenie monet

1011. Mamy osiem identycznie wyglądających monet. Wiemy, że co najwyżej jedna z tych monet jest fałszywa (lżejsza od prawdziwych). Jak przy pomocy dwóch ważeń na wadze szalkowej wykryć monetę fałszywą lub stwierdzić, że wszystkie monety są prawdziwe?

Rozwiązania zadań 995–1006

995. $1000=(5!+5)\cdot 8$ **996.** $1000=8\cdot\sqrt{5^6}$ **997.** $1000=\frac{7!}{5}-8$

998. $1000=\sqrt{2^{22-2}}-(2+2)!=\frac{\sqrt{2^{22}}}{2}-(2+2)!=\sqrt{\sqrt{\sqrt{(2\cdot 2\cdot 2+2)^{(2+2)!}}}}=$
$=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{22-2}{2}\right)^{(2+2)!}}}}$

999. $1000=4^4\cdot 4-4!=\frac{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}}{4}-4!=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(4+4+\sqrt{4}\right)^{4!}}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(4\cdot 4!+4)^{4!}}}}}$

1000. $2^{2^{1000}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{2^{22!}}}}}}}}}$ (22! − 1000 pierwiastków)

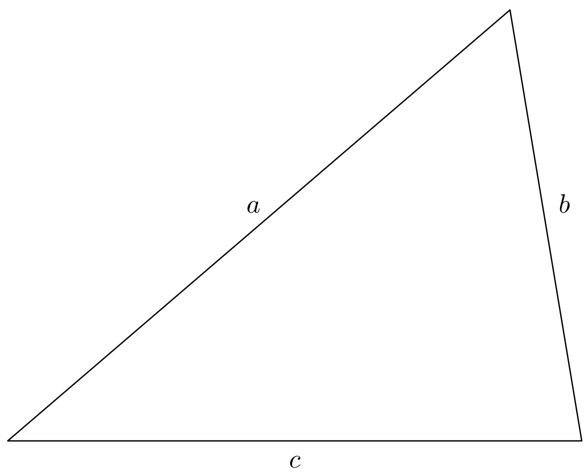
1001. $3000=(3!)!\cdot 4+5!$ **1002.** $4000=\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}-4!\cdot 4$

1003. $5000=7!-\frac{5!}{3}$ **1004.** $6000=7!+5!\cdot 8$

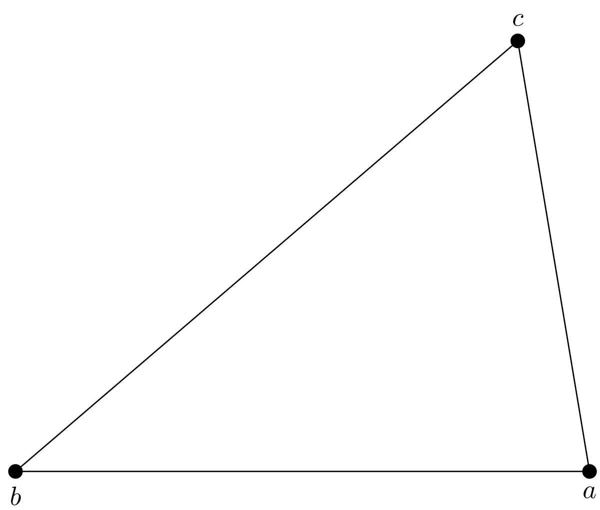
1005. W rozwiązaniu skorzystamy z twierdzenia o dwusiecznej, które mówi, że w trójkącie dwusieczna kąta wewnętrzego dzieli przeciwległy bok w proporcji równej proporcji długości pozostałych dwóch boków (krótsza część dzielonego boku jest przy krótszym boku).

Niech a, b i c będą długościami boków trójkąta jak na rysunku 1.

Rozmieśćmy w wierzchołkach masy proporcjonalne do długości przeciwległych boków (rys. 2). Korzystając z tego, że w matematyce, w przeciwieństwie do fizyki, do używanych wielkości nie dopisuje się zbyt namiętnie jednostek, a zamiast tego używa się *gołych* liczb, możemy wręcz powiedzieć, że masy te są równe długościom przeciwległych boków, pozostawiając w domyśle, że w zależności od kontekstu liczby oznaczają odpowiednią ilość jednostek długości albo masy.

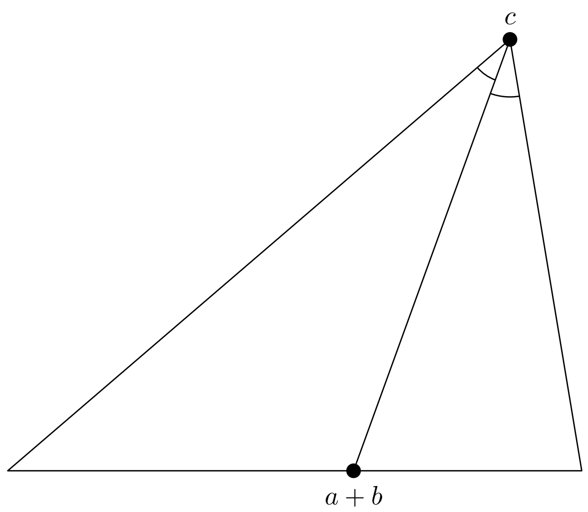


rys. 1

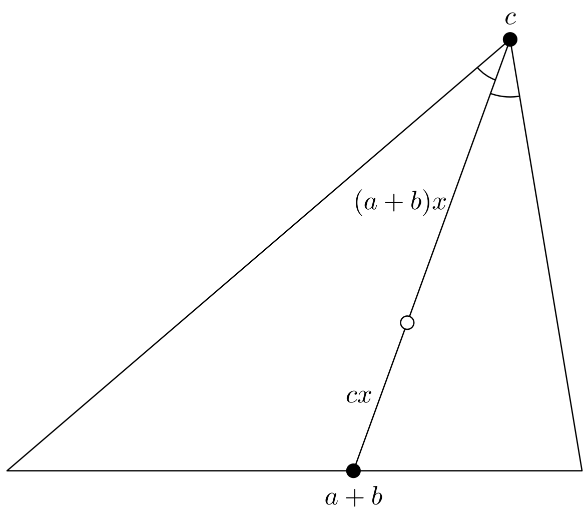


rys. 2

Z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że środek ciężkości mas a i b leży w punkcie przecięcia odpowiedniej dwusiecznej z przeciwległym bokiem, możemy więc przesunąć te dwie masy do ich środka ciężkości (rys. 3).



rys. 3



rys. 4

Wobec tego środek ciężkości wszystkich trzech mas leży na rozważanej dwusiecznej (rys. 4). Analogicznie, ten sam środek ciężkości leży na każdej z pozostałych dwóch dwusiecznych, skąd wynika, że wszystkie trzy dwusieczne przecinają się w jednym punkcie. Proporcje, w jakich są one dzielone przez punkt przecięcia, odczytujemy z proporcji odpowiednich mas (rys. 4).

1006. Nie. Ponieważ fałszywa może być dowolna z dziesięciu monet, mamy 10 możliwych sytuacji. Tymczasem dwa ważenia na wadze szalkowej mogą dać tylko 9 możliwych wyników, a więc w pewnych dwóch sytuacjach wyniki ważeń będą takie same, a co za tym idzie po dwóch ważeniach nie będziemy w stanie tych dwóch sytuacji rozróżnić.