Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 150 (6/2018)
Piątek, 9 lutego 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1012–1017** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1012. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 1, 3 i 4 (każdej tylko raz).

1013. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 3, 3 i 4.

1014. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 3, 3 i 5.

1015. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 3, 4 i 5 (każdej tylko raz). Podaj jak najwięcej rozwiązań.

1016. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 2, 2, 4 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1017. Zapisz liczbę 150 używając cyfr 2, 4, 7 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Środki ciężkości

1018. Jeden bok trójkąta podzielono na 3 równe części, drugi na 5, a trzeci na 7. Udowodnij, że można w taki sposób połączyć wierzchołki trójkąta z odpowiednio wybranymi punktami podziału przeciwległych boków, aby trzy narysowane odcinki przecięły się w jednym punkcie. W jakiej proporcji dzieli te odcinki punkt ich przecięcia? Jakie są proporcje pól sześciu trójkątów, na które narysowane odcinki dzielą wyjściowy trójkąt?

Ważenie monet

1019. Mamy cztery identycznie wyglądające monety. Wiemy, że jedna z tych monet jest fałszywa (ma inną wagę niż monety prawdziwe). Jak przy pomocy dwóch ważeń na wadze szalkowej wykryć monetę fałszywą?

Rozwiązania zadań 1007–1011

1007. $75=\frac{9!}{7!}+3$ **1008.** $76=\frac{(3!)!}{9}-4$ **1009.** $82=\sqrt{\frac{8!}{3!}+4}$

1010. Niech a, b i c będą długościami boków trójkąta, a x, y i z niech będą odległościami poszczególnych punktów styczności okręgu wpisanego od wierzchołków trójkąta jak na rysunku 1.

Rozmieśćmy w wierzchołkach masy odwrotnie proporcjonalne do ich odległości od punktów styczności boków z okręgiem wpisanym (rys. 2).

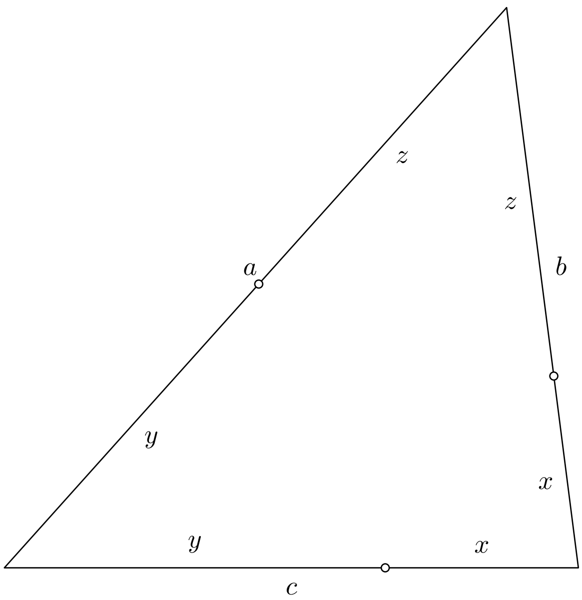
Z proporcji mas i długości poszczególnych odcinków wynika, że środek ciężkości mas $1/x$ i $1/y$ leży w punkcie styczności okręgu wpisanego z odpowiednim bokiem, możemy więc przesunąć te dwie masy do ich środka ciężkości (rys. 3).

Wobec tego środek ciężkości wszystkich trzech mas leży na odcinku łączącym punkt styczności okręgu wpisanego z przeciwległym wierzchołkiem (rys. 4). Analogicznie, ten sam środek ciężkości leży na każdym z pozostałych dwóch odcinków łączących punkty styczności okręgu wpisanego z przeciwległymi wierzchołkami. Stąd wynika, że wszystkie trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie. Proporcje, w jakich są one dzielone przez punkt przecięcia, odczytujemy z proporcji odpowiednich mas (rys. 4).

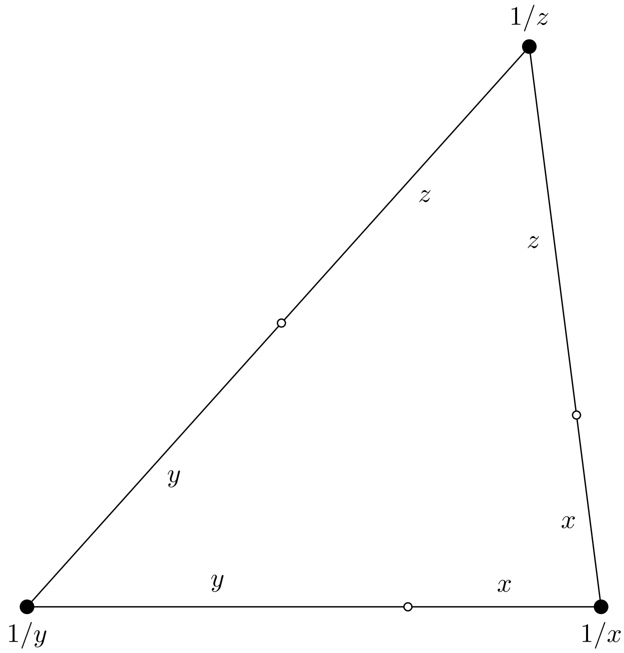
Pozostaje odnotować, że

$$x=\frac{b+c-a}{2}, \qquad y=\frac{a+c-b}{2}, \qquad z=\frac{a+b-c}{2},$$

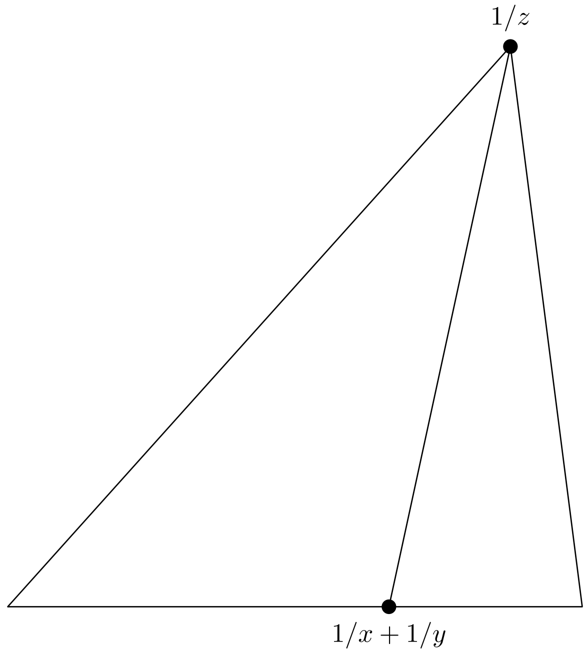
co pozwala wyrazić proporcje podziału narysowanych odcinków w zależności od długości boków trójkąta.



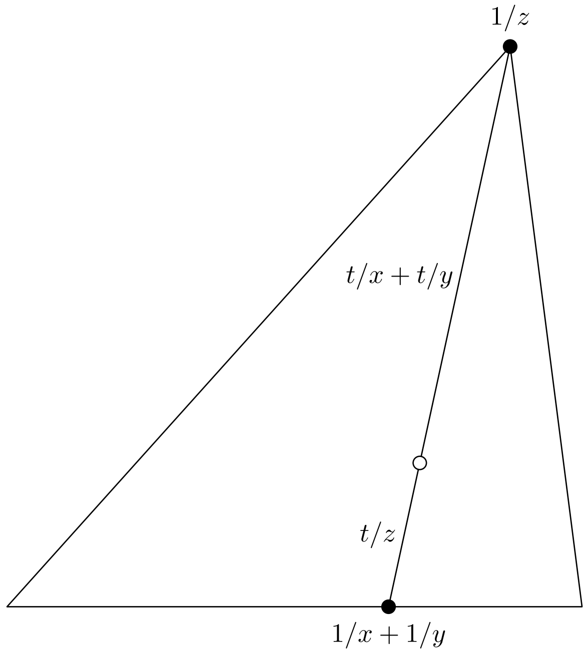
rys. 1



rys. 2



rys. 3



rys. 4

1011. Kładziemy po trzy monety na każdą z szalek wagi. Jeżeli waga nie jest w równowadze, na szalce z mniejszym ciężarem znajduje się fałszywa moneta. Drugie ważenie sprowadza się do wykrycia wśród nich fałszywej monety jak w zadaniu **993**.

Jeśli zaś w pierwszym ważeniu waga jest w równowadze, to ewentualna fałszywa moneta znajduje się wśród pary monet, których nie położyliśmy na wadze. Wtedy w drugim ważeniu kładziemy te monety na wadze, po jednej na każdą szalkę. Wówczas lżejsza moneta jest fałszywa, a gdy waga jest w równowadze, to znaczy, że wszystkie monety są prawdziwe.