Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 151 (7/2018)
Piątek, 16 lutego 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1020**, **1021** i **1022** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1020. Zapisz liczbę 434 używając cyfr 2, 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

1021. Zapisz liczbę 443 używając cyfr 2, 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

1022. Zapisz liczbę 446 używając cyfr 2, 3, 5 i 7 (każdej tylko raz).

Środki ciężkości

1023. Podstawę trójkąta równoramiennego podzielono na 5 równych części, a każde z ramion na 3. Udowodnij, że można w taki sposób połączyć wierzchołki trójkąta z odpowiednio wybranymi punktami podziału przeciwległych boków, aby trzy narysowane odcinki przecięły się w jednym punkcie. W jakiej proporcji dzieli te odcinki punkt ich przecięcia? Jakie są proporcje pól sześciu trójkątów, na które narysowane odcinki dzielą wyjściowy trójkąt?

Ważenie monet

1024. Mamy cztery identycznie wyglądające monety. Wiemy, że dwie z tych monet są fałszywe (lżejsze od prawdziwych). Jak przy pomocy dwóch ważeń na wadze szalkowej wykryć monety fałszywe?

Rozwiązania zadań 1012–1019

1012. $150=(4!+1)\cdot 3!$ **1013.** $150=3!\cdot 4!+3!$ **1014.** $150=\frac{(3!)!}{5}+3!$

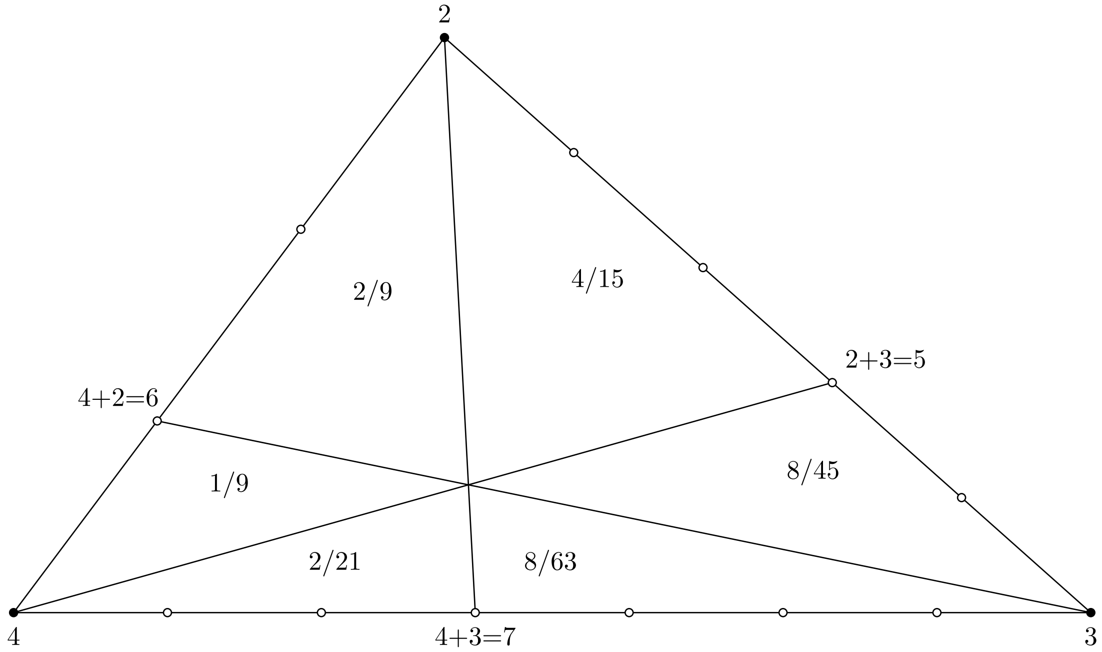
1015. $150=5!+4!+3!=5\cdot(4!+3!)=5^{\sqrt{4}}\cdot 3!=\frac{(3!)!}{4!}\cdot 5=\frac{(3!)!}{4!}+5!=\frac{(3!)!-5!}{4}$

1016. $150=22\cdot 7-4=74\cdot 2+2$ **1017.** $150=2\cdot 77-4=(77-2)\cdot\sqrt{4}$

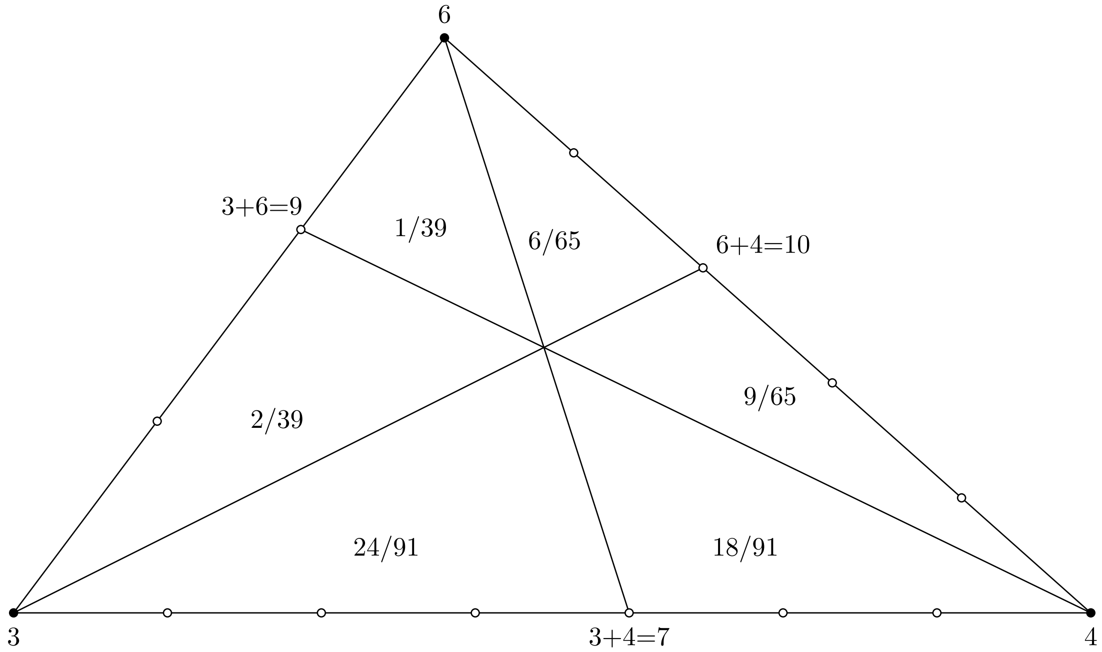
1018. Rozmieśćmy w wierzchołkach trójkąta masy 2, 3 i 4 jak na rysunku 1. Wówczas środki ciężkości par mas leżą w punktach podziału poszczególnych boków, co prowadzi do konfiguracji wymaganej w treści zadania. Każdy z trzech narysowanych odcinków jest dzielony przez środek ciężkości trzech mas w proporcji równej stosunkowi masy umieszczonej w odpowiednim wierzchołku do sumy pozostałych dwóch mas, a więc są to proporcje 2:7, 4:5 i 3:6=1:2. Z tych proporcji oraz z proporcji podziału poszczególnych boków przez końce narysowanych odcinków odczytujemy proporcje pól sześciu trójkątów. Na rysunku podano stosunki pól poszczególnych trójkątów podziału do pola całego trójkąta.

Inne rozwiązanie zadania otrzymujemy rozmieszczając w wierzchołkach trójkąta masy 3, 4 i 6 jak na rysunku 2. Wówczas trzy poprowadzone odcinki są dzielone przez punkt przecięcia w proporcjach 6:7, 3:10 i 4:9, a pola sześciu trójkątów podziału (w stosunku do pola całego trójkąta) są zaznaczone na rysunku 2.

Porównanie proporcji pól i odcinków w obu rozwiązaniach pokazuje, że są to istotnie różne konfiguracje.



rys. 1



rys. 2

1019. Kładziemy po jednej monecie na każdą z szalek wagi. W ten sposób dowiadujemy się, czy fałszywa moneta jest wśród dwóch monet położonych na wadze, czy wśród dwóch pozostałych monet. W szczególności o pewnych dwóch monetach dowiadujemy się, że są prawdziwe.

W drugim ważeniu kładziemy na lewą szalkę monetę prawdziwą, a na prawą jedną z dwóch monet, których prawdziwości jeszcze nie ustaliliśmy. Na podstawie wyniku ważenia dowiadujemy się, czy moneta na prawej szalce jest fałszywa czy prawdziwa, co pozwala wskazać monetę fałszywą.