Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 157 (13/2018)
Środa, 28 marca 2018 r.

Łamigłówki i zadania na ferie

W łamigłówkach **1051–1067** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1051. Zapisz liczbę 3665 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1052. Zapisz liczbę 3673 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1053. Zapisz liczbę 3680 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1054. Zapisz liczbę 3705 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1055. Zapisz liczbę 3709 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1056. Zapisz liczbę 3720 używając cyfr 3, 3, 5 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1057. Zapisz liczbę 3729 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1058. Zapisz liczbę 3731 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1059. Zapisz liczbę 3744 używając cyfr 3, 3, 5 i 7. Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1060. Zapisz liczbę 3750 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1061. Zapisz liczbę 3773 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1062. Zapisz liczbę 3780 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1063. Zapisz liczbę 3785 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1064. Zapisz liczbę 3788 używając cyfr 3, 3, 5 i 7. (dla ambitnych)

1065. Zapisz liczbę 3845 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1066. Zapisz liczbę 3869 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

1067. Zapisz liczbę 3888 używając cyfr 3, 3, 5 i 7.

Środki ciężkości

1068. Udowodnij, że w dowolnym czworościanie środkowe przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji są one dzielone przez punkt przecięcia? Środkowa czworościanu to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany.

Ważenie monet

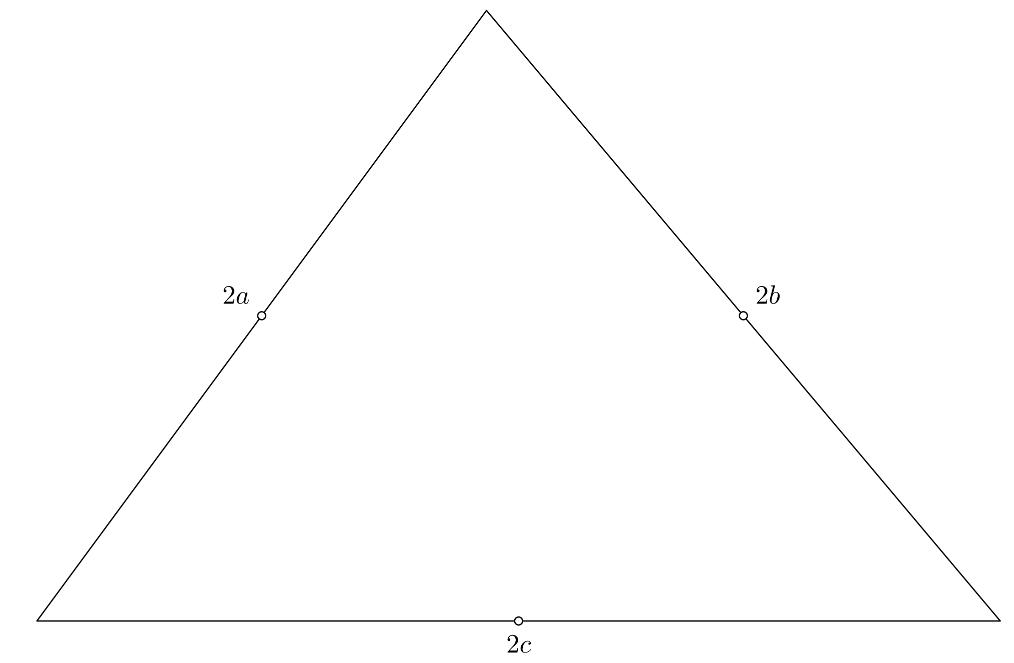
1069. Mamy sześć identycznie wyglądających monet. Wiemy, że trzy z tych monet są fałszywe (lżejsze od prawdziwych). Jak przy pomocy trzech ważeń na wadze szalkowej wykryć monety fałszywe?

Rozwiązania zadań 1046–1050

1046. $84=\sqrt{(3!)^5-(3!)!}=5!-3!\cdot 3!$ **1047.** $89=\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{5!+0!}\right)!}{7!}+0!}$ **1048.** $95=(3!)!-5^4$

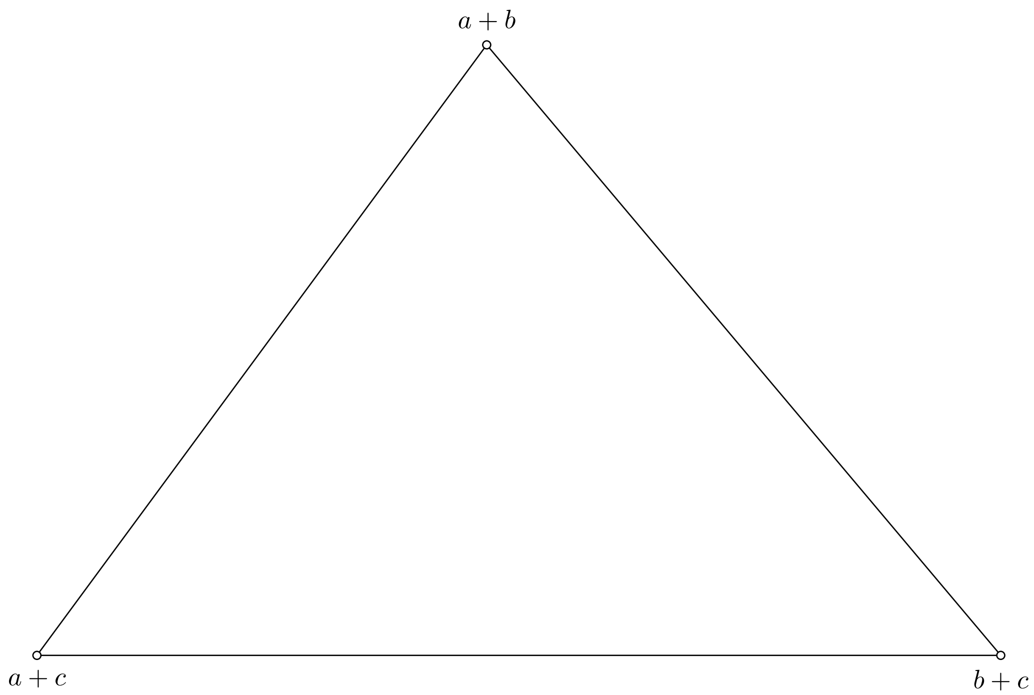
1049. *Sposób I:* Rozważmy trójkąt równoramienny o bardzo krótkiej podstawie i bardzo długich ramionach. Jego środek ciężkości leży w $1/3$ wysokości. Jednak obwód tego trójkąta składa się z dwóch prawie pokrywających się odcinków (ramion) i podstawy zaniedbywalnej pod względem masy. Zatem środek ciężkości obwodu leży prawie w połowie wysokości trójkąta. Skoro oba środki ciężkości leżą w różnych odległościach od podstawy trójkąta, to znaczy, że się nie pokrywają.

Sposób II: Załóżmy, że dany jest trójkąt nierównoboczny o bokach długości $a\leqslant b\leqslant c$ i rozmieśćmy w środkach jego boków odpowiednio masy $2a$, $2b$ i $2c$ (rys. 1). Wówczas środek ciężkości tych trzech mas pokrywa się ze środkiem ciężkości obwodu trójkąta.



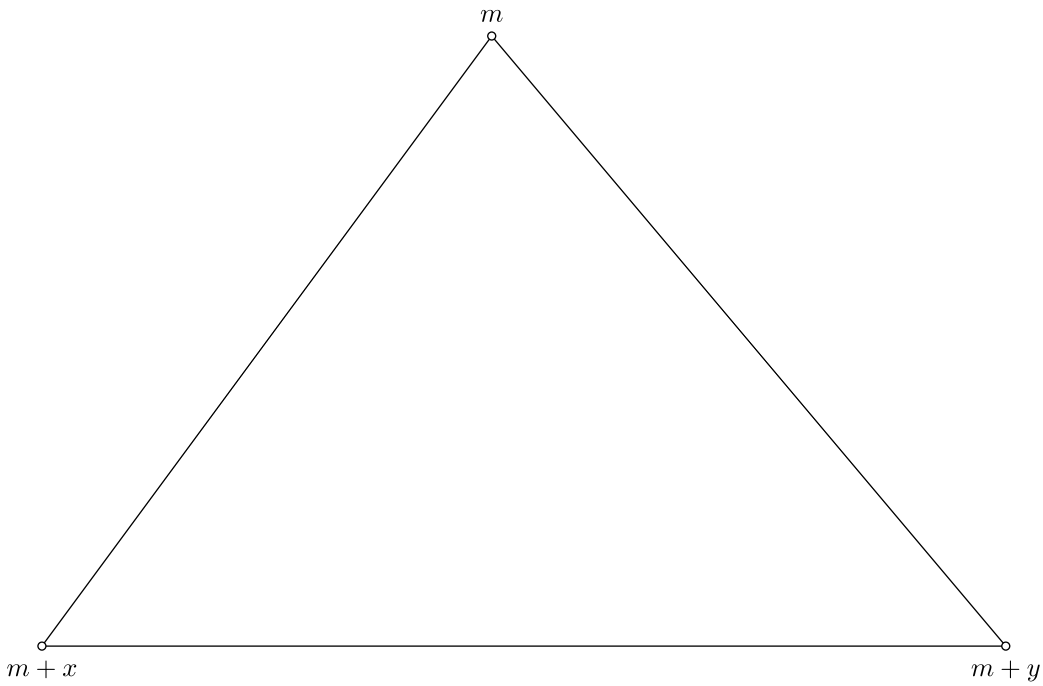
rys. 1

Następnie podzielmy każdą z mas na połowy, które rozsuniemy do końców odpowiednich boków (rys. 2). Wówczas najmniejszą z trzech mas rozmieszczonych w wierzchołkach trójkąta jest $a+b$. Dla przejrzystości oznaczmy $m=a+b$, $x=c-b$ oraz $y=c-a$. Ponieważ trójkąt jest nierównoboczny, masa y jest dodatnia.

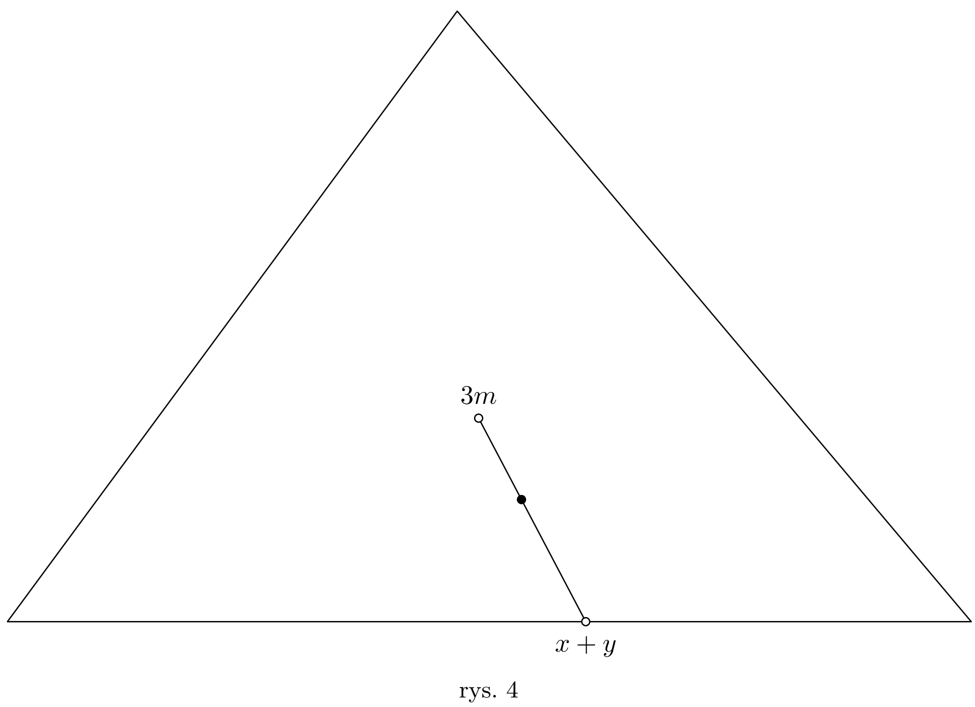


rys. 2

Jeżeli $x>0$, to zgodnie z przyjętymi oznaczeniami, w wierzchołkach rozmieszczone są masy jak na rysunku 3. Zsuwamy trzy masy m ze wszystkich wierzchołków do środka ciężkości trójkąta, a masy x i y do ich środka ciężkości leżącego na jednym z boków trójkąta. Wobec tego środek ciężkości wszystkich mas (czyli środek ciężkości obwodu trójkąta) leży na odcinku łączącym środek ciężkości trójkąta z punktem na jednym z boków trójkąta i nie jest żadnym z końców tego odcinka (rys. 4). To pokazuje, że środek ciężkości trójkąta i środek ciężkości obwodu trójkąta są różnymi punktami.

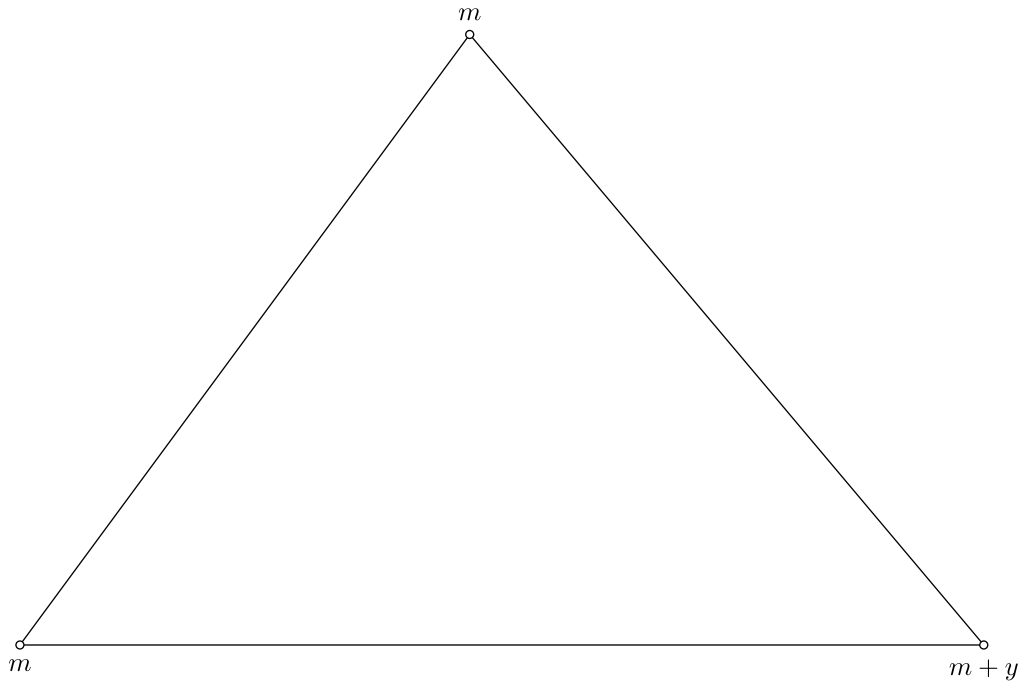


rys. 3

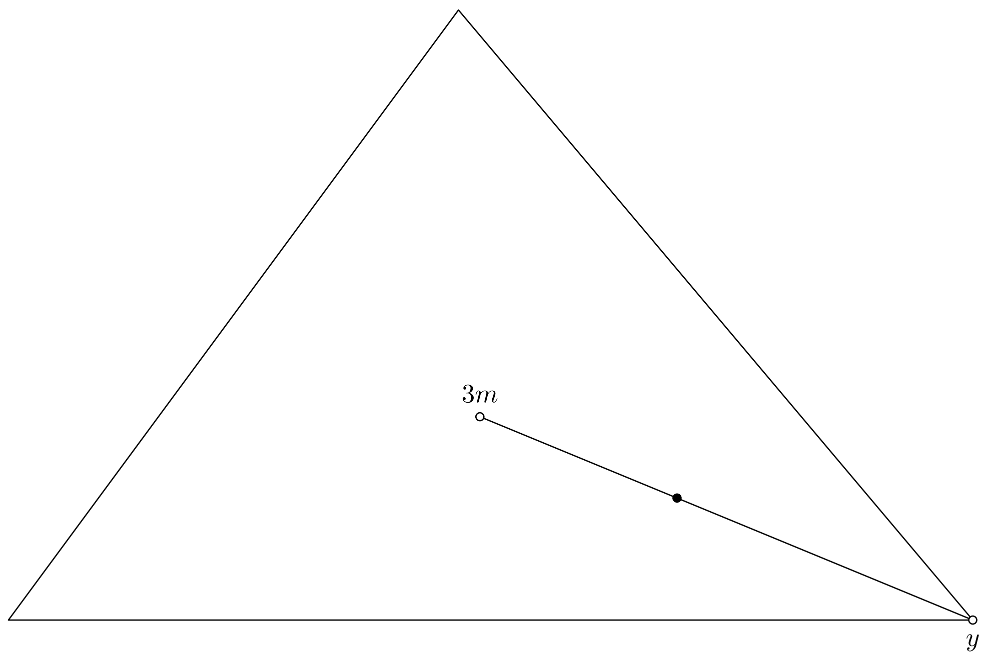


rys. 4

Jeżeli zaś $x=0$, to w wierzchołkach rozmieszczone są masy jak na rysunku 5. Zsuwamy trzy masy m ze wszystkich wierzchołków do środka ciężkości trójkąta, a masę y pozostawiamy w wierzchołku, w którym się znajdowała. Środek ciężkości wszystkich mas (czyli środek ciężkości obwodu trójkąta) leży na odcinku łączącym środek ciężkości trójkąta z jednym z wierzchołków trójkąta i nie jest żadnym z końców tego odcinka (rys. 6). To pokazuje, że także w tym przypadku środek ciężkości trójkąta i środek ciężkości obwodu trójkąta są różnymi punktami.



rys. 5



rys. 6

1050. Nie. Ponieważ fałszywa może być dowolna piątka z dziesięciu monet, mamy $\binom{10}{5} = 252$ możliwe sytuacje. Tymczasem pięć ważeń na wadze szalkowej może dać tylko 243 możliwe wyniki, a więc w pewnych dwóch sytuacjach wyniki ważeń będą takie same, a co za tym idzie po pięciu ważeniach nie będziemy w stanie tych dwóch sytuacji rozróżnić.