Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 158 (14/2018)
Piątek, 6 kwietnia 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1070**, **1071** i **1072** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1070. Zapisz liczbę 63 używając cyfr 6, 8 i 9 (każdej tylko raz).

1071. Zapisz liczbę 65 używając cyfr 3, 8 i 9 (każdej tylko raz).

1072. Zapisz liczbę 65 używając trzech piątek.

Środki ciężkości

1073. Udowodnij, że w dowolnym czworościanie odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji odcinki te są dzielone przez punkt przecięcia?

Ważenie monet

1074. Mamy pięć identycznie wyglądających monet. Wiemy, że dwie lub trzy z tych monet są fałszywe (lżejsze od prawdziwych). Jak przy pomocy trzech ważeń na wadze szalkowej wykryć monety fałszywe?

Rozwiązania zadań 1051–1069

1051. $3665=5\cdot 733$ **1052.** $3673=(3!)!\cdot 5+73$ **1053.** $3680=\left(3^{3!}+7\right)\cdot 5$

1054. $3705=((3!)!+3\cdot 7)\cdot 5$ **1055.** $3709=7!-(5+3!)^3$

1056. $3720=(37-3!)\cdot 5!=7!-(3!)!-(3!)!+5!=5!\cdot 37-(3!)!=5\cdot((3!)!+(7-3)!)$

1057. $3729=33\cdot(5!-7)$ **1058.** $3731=7\cdot 533$

Czwarte rozwiązanie zadania **1056** podał Władysław Daleczko.

1059. $3744=7!-\sqrt{(3!)^{5+3}}=7!-\dfrac{(3!)^5}{3!}=\dfrac{7!\cdot 3}{5}+(3!)!$

1060. $3750=5^{7-3}\cdot 3!$ **1061.** $3773=7^3\cdot(5+3!)$ **1062.** $3780=\dfrac{7!\cdot 3!}{3+5}$

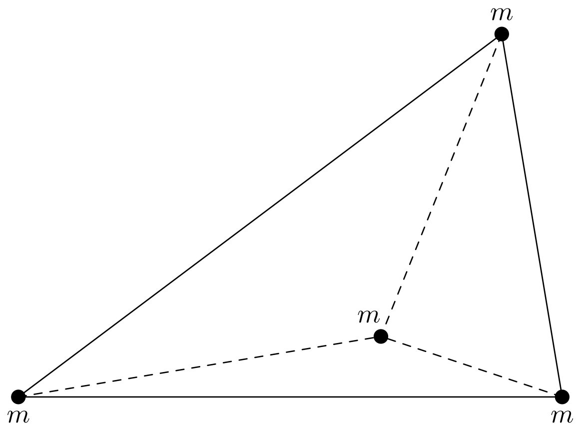
1063. $3785=((3!)!+37)\cdot 5$ **1064.** $3788=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3^{5!}}}}+37}$

1065. $3845=\sqrt{5^{3+7}}+(3!)!$ **1066.** $3869=53\cdot 73$ **1067.** $3888=\dfrac{(3!)^5}{\sqrt{7-3}}=\dfrac{(3!)^{3!}}{5+7}$

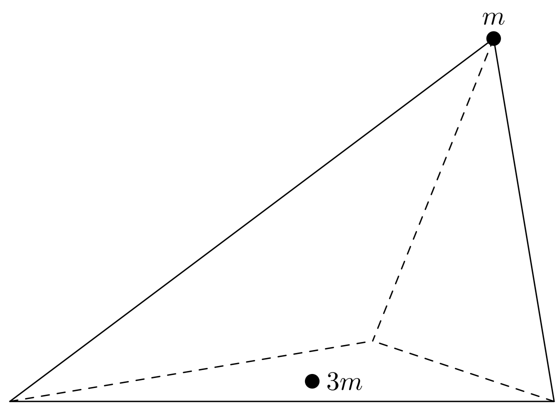
1068. Umieśćmy w wierzchołkach czworościanu jednakowe masy punktowe jak na rysunku 1.

Położenie środka ciężkości tych czterech mas nie zmieni się, jeżeli trzy z nich zsuniemy do środka ciężkości ściany, w której wierzchołkach zostały one pierwotnie umieszczone (rys. 2).

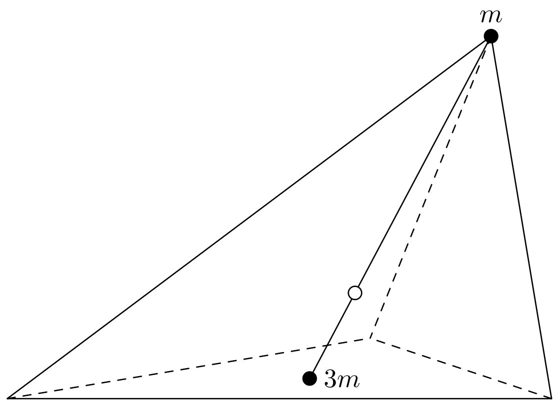
Wobec tego środek ciężkości rozważanych mas leży na odcinku łączącym środek ciężkości ściany z przeciwległym wierzchołkiem (rys. 3), czyli na środkowej czworościanu, i dzieli tę środkową w proporcji 3:1. Analogicznie, ten sam środek ciężkości leży na pozostałych trzech środkowych czworościanu, w 1/4 ich długości licząc od ścian.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

1069. W pierwszym ważeniu kładziemy po jednej monecie na każdą z szalek wagi.

Jeżeli waga nie jest w równowadze, to tym samym wykrywamy jedną monetę fałszywą, a pozostałe dwie fałszywe monety znajdują się w czwórce monet, których nie kładliśmy na wagę. Jak je wykryć przy pomocy dwóch ważeń, wiemy z zadania **1024**.

Jeśli natomiast waga jest w równowadze, to znaczy, że obie ważone monety są jednakowe (obie prawdziwe albo obie fałszywe). Wówczas w drugim ważeniu kładziemy na lewą szalkę jedną z tych monet, a na prawą jedną z pozostałych czterech monet. Możliwe są trzy wyniki drugiego ważenia — od tego zależy nasze wnioskowanie i wybór monet do trzeciego ważenia:

1° Waga jest w równowadze.
Oznacza to, że wszystkie trzy monety, które brały udział w pierwszych dwóch ważeniach są jednakowe i pozostałe trzy monety są jednakowe. Jednym ważeniem rozstrzygamy, które są prawdziwe, a które fałszywe.

2° Moneta na lewej szalce jest lżejsza.
Oznacza to, że dwie monety użyte w pierwszym ważeniu są fałszywe, a moneta z prawej szalki drugiego ważenia jest prawdziwa. Wśród pozostałych trzech monet jedna jest fałszywa, a dwie prawdziwe. Monetę fałszywą wykryjemy trzecim ważeniem.

3° Moneta na lewej szalce jest cięższa.
Oznacza to, że dwie monety użyte w pierwszym ważeniu są prawdziwe, a moneta z prawej szalki drugiego ważenia jest fałszywa. Wśród pozostałych trzech monet dwie są fałszywe, a jedna prawdziwa. Monetę prawdziwą wykryjemy trzecim ważeniem.