

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1080**, **1081** i **1082** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1080. Zapisz liczbę 23 używając trzech piątek.

1081. Zapisz liczbę 199 używając cyfr 1, 3 i 8 (każdej tylko raz).

1082. Zapisz liczbę 423 używając cyfr 4, 5, 7 i 7.



Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 160 (16/2018)

Piątek, 20 kwietnia 2018 r.

Środki ciężkości

1083. Udowodnij, że w dowolnym ostrosłupie o podstawie będącej czworokątem wypukłym odcinki łączące środki ciężkości ścian bocznych ze środkami przeciwległych krawędzi podstawy przecinają się w jednym punkcie. W jakiej proporcji odcinki te są dzielone przez punkt przecięcia?

Ważenie monet

1084. Mamy dziesięć ogromnych skrzyń pełnych monet. Wiadomo, że w niektórych skrzyniach (być może w żadnej albo we wszystkich) znajdują się same monety prawdziwe (o wadze 10 gramów każda), a w pozostałych skrzyniach same monety fałszywe (o wadze 9 gramów każda). Ile ważeń na wadze elektronicznej potrzeba, aby wykryć, które skrzynie zawierają monety fałszywe?

Rozwiązania zadań 1075–1079

$$1075. 11 = \sqrt{\frac{6! + 3!}{3!}}$$

$$1076. 90 = \frac{7!}{4!} - 5!$$

$$1077. 174 = \frac{6! - 4!}{4}$$

1078. Rozmieścimy w wierzchołkach czworościanu masy 1, 2, 4 i 8 jak na rysunku 1. Wówczas środki ciężkości par mas leżą w punktach podziału poszczególnych krawędzi na 45 równych części, co prowadzi do konfiguracji wymaganej w treści zadania. Zauważmy, że wybierane punkty podziału leżą w $1/3$, $1/5$ lub $1/9$ długości krawędzi.

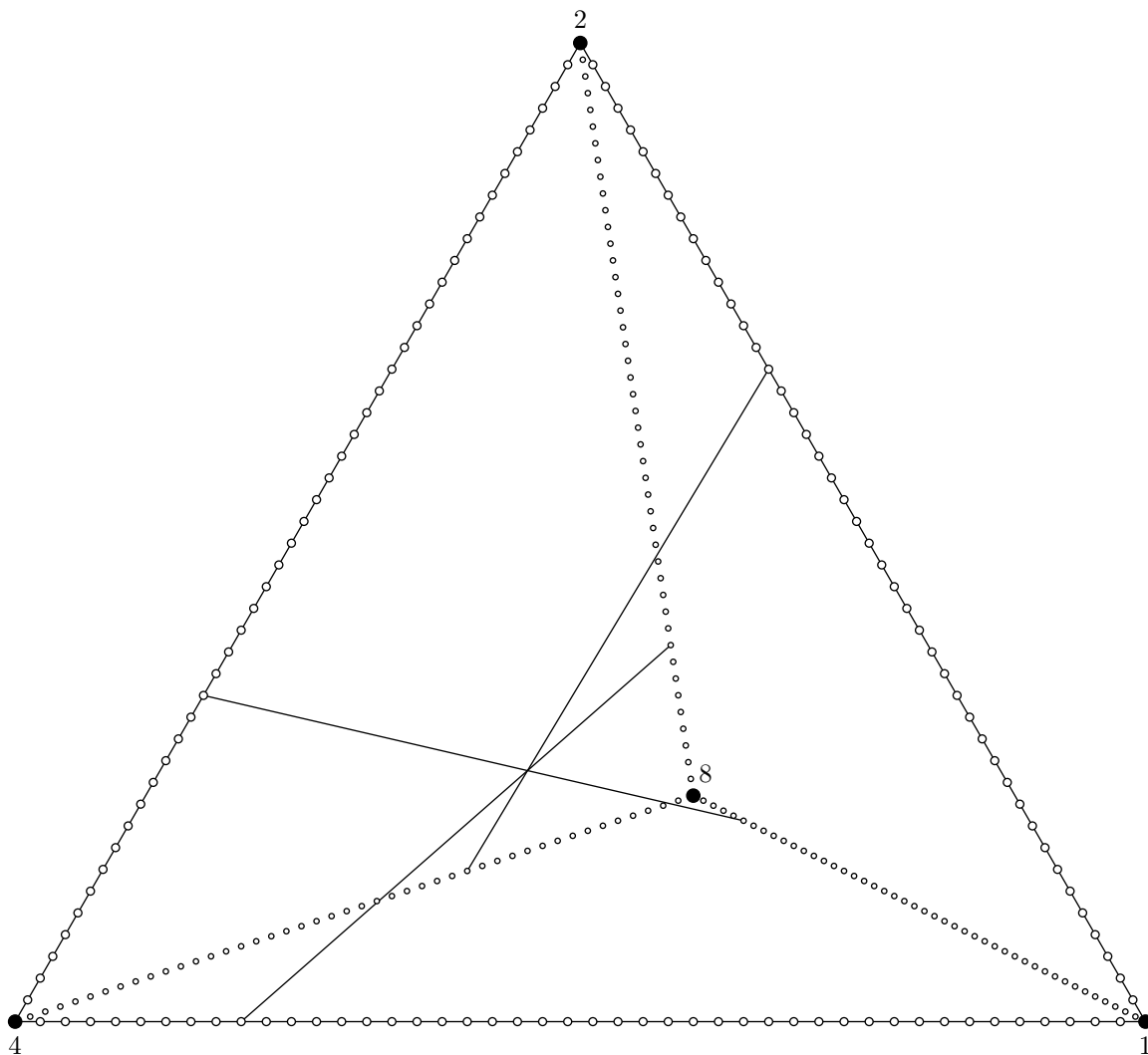
W podobny sposób możemy uzyskać nieskończenie wiele istotnie różnych rozwiązań zadania. Wystarczy wyjść od rozmieszczenia w wierzchołkach czworościanu mas będących czterema liczbami naturalnymi, które w rozkładzie na czynniki pierwsze mają różną liczbę dwójek – jest to konieczne i wystarczające do otrzymania na krawędziach punktów powstałych z podziału na **nieparzystą** liczbę równych części.

Przykładowe rozwiązania:

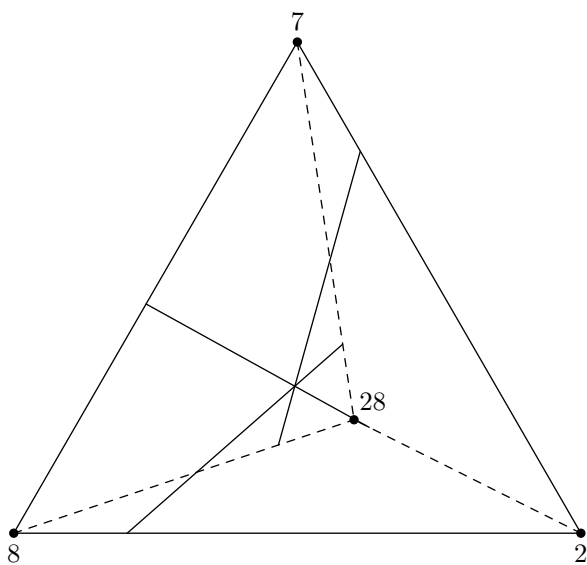
- masy 2, 7, 8 i 28 – podział krawędzi na 45 równych części (rys. 2),
- masy 2, 5, 16 i 40 – podział krawędzi na 63 równe części (rys. 3).

1079. Wystarczy jedno ważenie. Numerujemy skrzynie liczbami od 1 do 10. Na wadze kładziemy 55 monet, biorąc i monet z i -tej skrzyni. Wówczas łączna masa ważonych monet jest równa $550 - i$, gdzie i jest numerem skrzyni z fałszywymi monetami.

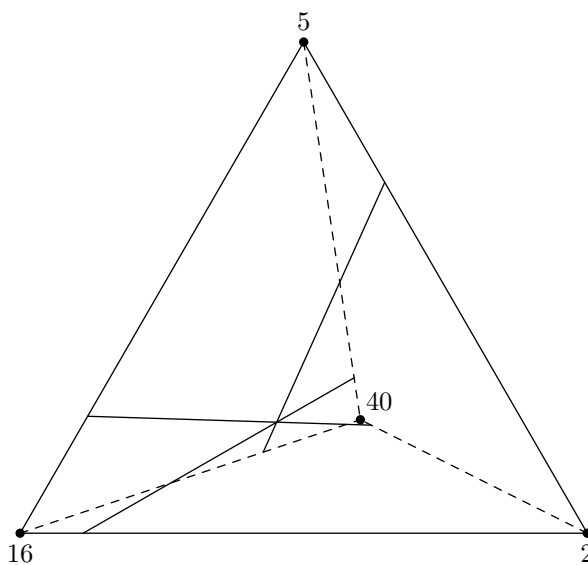
Numerowanie skrzyń liczbami od 1 do 10 jest wprawdzie dość naturalne, ale oszczędniejsze byłoby ponumerowanie ich liczbami od 0 do 9. W takim wypadku wystarczyłoby położyć na wadze tylko 45 monet.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

