Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 162 (18/2018)

Piątek, 4 maja 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1092–1095** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1092. Zapisz liczbę 191 używając cyfr 2, 3, 4 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1093. Zapisz liczbę 194 używając cyfr 2, 3, 4 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1094. Zapisz liczbę 198 używając cyfr 2, 3, 4 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1095. Zapisz liczbę 199 używając cyfr 2, 3, 4 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Wielomiany

1096. Wielomian piątego stopnia o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości całkowite dla sześciu kolejnych argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla każdego argumentu całkowitego wartość wielomianu jest liczbą całkowitą.

1097. Wielomian piątego stopnia o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości całkowite dla sześciu argumentów całkowitych (tym razem niekoniecznie kolejnych). Udowodnij, że współczynniki wielomianu są liczbami wymiernymi.

Rozwiązania zadań 1085–1091

1085. $161=23\cdot 7$ **1086.** $171=4!\cdot 7+3$ **1087.** $181=\sqrt{\sqrt{2^{4!+3!}}-7}$

1088. Rozważmy czworościan, w którym jedna ze ścian jest bardzo małym trójkątem równobocznym, a pozostałe trzy krawędzie mają taką samą bardzo dużą długość – jest to bardzo wysoki ostrosłup prawidłowy o podstawie trójkątnej.

Wówczas środek ciężkości czworościanu leży dokładnie w 1/4 jego wysokości, a powierzchnia czworościanu składa się z trzech ścian bocznych (mających środki ciężkości dokładnie w 1/3 wysokości) oraz zaniedbywalnie małej podstawy, która łączny środek ciężkości powierzchni całkowitej obniża nieznacznie poniżej 1/3 wysokości.

Podumowując: środek ciężkości rozważanego czworościanu leży w 1/4 jego wysokości, a środek ciężkości powierzchni odrobinkę poniżej 1/3 wysokości, w związku z czym te środki ciężkości są różnymi punktami.

1089. Rozważmy czworościan jak w zadaniu poprzednim.

Wówczas środek ciężkości trzech krawędzi bocznych czworościanu leży dokładnie w 1/2 jego wysokości, a zaniedbywalnie małe krawędzie podstawy obniżają środek ciężkości wszystkich sześciu krawędzi nieznacznie poniżej 1/2 wysokości.

W konsekwencji środek ciężkości czworościanu leży dokładnie w 1/4 wysokości czworościanu, a środek ciężkości krawędzi nieznacznie poniżej 1/2 wysokości, w związku z czym te środki ciężkości są różnymi punktami.

1090. Rozważmy czworościan jak w zadaniach poprzednich.

Wówczas środek ciężkości powierzchni czworościanu leży odrobinkę poniżej 1/3 wysokości, a środek ciężkości krawędzi nieznacznie poniżej 1/2 wysokości, w związku z czym te środki ciężkości są różnymi punktami.

Uwaga 1

Należy podkreślić, że środek ciężkości czworościanu jest jednocześnie środkiem ciężkości wierzchołków (czterech jednakowych mas punktowych), jak i środkiem cieżkości pełnego czworościanu (bryły).

Uwaga 2

Jakkolwiek przytoczone rozumowania są wystarczająco przekonywujące, można je poprzeć precyzyjnymi rachunkami.

Przyjmijmy, że rozważany czworościan jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym o długości krawędzi podstawy 1 i krawędziach bocznych długości a.

Środek ciężkości ostrosłupa leży w **1/4 wysokości**.

Środek ciężkości krawędzi bocznych leży w połowie wysokości ostrosłupa, a środek cięzkości krawędzi podstawy znajduje się w płaszczyźnie podstawy. Po uwzględnieniu proporcji mas tych trójek krawędzi, wyliczamy położenie środka ciężkości wszystkich sześciu krawędzi jako $\frac{a}{2\cdot(a+1)}$ wysokości ostrosłupa (licząc od podstawy).

Do wyznaczenia środka ciężkości powierzchni potrzebujemy pól ścian ostrosłupa:

- pole podstawy ostrosłupa: $\frac{\sqrt{3}}{4}$,
- pole ściany bocznej ostrosłupa: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$.

Ponieważ środek cieżkości podstawy leży w płaszczyźnie podstawy, a środek ciężkości ścian bocznych w 1/3 wysokości ostrosłupa, środek ciężkości powierzchni ostrosłupa leży w

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{4}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}}$$

wysokości ostrosłupa.

Ładne liczby otrzymamy np. dla $a=13$, gdzie środek ciężkości krawędzi leży w 13/28 wysokości, a środek ciężkości powierzchni całkowitej w 15/46 wysokości.

1091. Nie wynika. Rozważmy czworościan nieforemny, którego pewne dwie przeciwległe krawędzie są równej długości, a także pozostałe cztery krawędzie są równej długości. Wówczas ze względu na symetrię środek ciężkości wszystkich sześciu krawędzi, środek ciężkości powierzchni czworościanu oraz środek ciężkości czworościanu leżą w tym samym punkcie.

Jeśli ktoś chciałby wspomóc swoją wyobraźnię przestrzenną, powinien wyobrazić sobie prostopadłościan o podstawie kwadratowej, najlepiej o krótkiej krawędzi podstawy i długiej krawędzi bocznej. Biorąc pod uwagę co drugi wierzchołek tego prostopadłościanu, otrzymamy wierzchołki czworościanu, o którym mowa w rozwiązaniu.

Należy podkreślić, że słowo symetria zostało użyte w rozwiązaniu w sensie potocznym, a nie ściśle matematycznym, gdzie powinniśmy raczej powiedzieć o izometrii będącej złożeniem symetrii względem płaszczyzny równoległej do podstaw prostopadłościanu (i równoodległej od tych podstaw) oraz obrotu o kąt 90° wokół prostej przechodzącej przez środki podstaw.