Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 163 (19/2018)
Piątek, 11 maja 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1098**, **1099** i **1100** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1098. Zapisz liczbę 95 używając cyfr 0, 4 i 7 (każdej tylko raz).

1099. Zapisz liczbę 272 używając cyfr 4, 4, 5 i 6.

1100. Zapisz liczbę 393 używając cyfr 1, 3, 8 i 9 (każdej tylko raz).

Wielomiany

1101. Wielomian piątego stopnia o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości całkowite dla sześciu kolejnych argumentów całkowitych. Czy stąd wynika, że współczynniki wielomianu są liczbami całkowitymi?

1102. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią n o następującej własności: Dla każdego wielomianu piątego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmującego wartości całkowite dla sześciu kolejnych argumentów całkowitych, wielomian $n\cdot W(x)$ ma współczynniki całkowite.

1103. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p>7$ oraz każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n)\equiv W(n+p) \pmod p\ .$$

1104. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n)\equiv W(n+7) \pmod 7\ .$$

1105. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n)\equiv W(n+5) \pmod 5\ .$$

1106. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n)\equiv W(n+3) \pmod 3\ .$$

1107. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n)\equiv W(n+2) \pmod 2\ .$$

Rozwiązania zadań 1092–1097

1092. $191=7\cdot(4!+3)+2=4!\cdot 7+23$ **1093.** $194=\dfrac{(3!)!}{4}+2\cdot 7=(2+3)!+74$

1094. $198=\dfrac{7!}{4!}-2\cdot 3!=\dfrac{(3!)!+72}{4}$

1095. $199=4!\cdot 2^3+7=4!\cdot(3!+2)+7=7^2\cdot 4+3=\left(7\cdot\sqrt{4}\right)^2+3$

1096. Dowolny wielomian piątego stopnia $W(x)$ spełnia tożsamość

$$\binom{6}{0}\cdot W(x)-\binom{6}{1}\cdot W(x+1)+\binom{6}{2}\cdot W(x+2)-\binom{6}{3}\cdot W(x+3)+$$
$$+\binom{6}{4}\cdot W(x+4)-\binom{6}{5}\cdot W(x+5)+\binom{6}{6}\cdot W(x+6)=0\,,$$

czyli

$$W(x)-6\cdot W(x+1)+15\cdot W(x+2)-20\cdot W(x+3)+15\cdot W(x+4)-6\cdot W(x+5)+W(x+6)=0.$$

Stąd otrzymujemy

$$W(x+6)=-W(x)+6\cdot W(x+1)-15\cdot W(x+2)+20\cdot W(x+3)-15\cdot W(x+4)+6\cdot W(x+5)$$

oraz

$$W(x)=6\cdot W(x+1)-15\cdot W(x+2)+20\cdot W(x+3)-15\cdot W(x+4)+6\cdot W(x+5)-W(x+6)\,.$$

Jeśli więc wielomian przyjmuje wartości całkowite dla sześciu kolejnych argumentów całkowitych, to dla każdego argumentu całkowitego wartość wielomianu jest liczbą całkowitą.

1097. Niech n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 będą argumentami całkowitymi, dla których wielomian $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite.

Rozważmy wielomian

$$V_1(x)=\frac{(x-n_2)\cdot(x-n_3)\cdot(x-n_4)\cdot(x-n_5)\cdot(x-n_6)}{(n_1-n_2)\cdot(n_1-n_3)\cdot(n_1-n_4)\cdot(n_1-n_5)\cdot(n_1-n_6)}\,.$$

Wówczas

$$V_1(n_1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad V_1(n_2)=V_1(n_3)=V_1(n_4)=V_1(n_5)=V_1(n_6)=0\,.$$

Podobnie wielomian

$$V_2(x)=\frac{(x-n_1)\cdot(x-n_3)\cdot(x-n_4)\cdot(x-n_5)\cdot(x-n_6)}{(n_2-n_1)\cdot(n_2-n_3)\cdot(n_2-n_4)\cdot(n_2-n_5)\cdot(n_2-n_6)}$$

spełnia warunki

$$V_2(n_2)=1 \qquad \text{oraz} \qquad V_2(n_1)=V_2(n_3)=V_2(n_4)=V_2(n_5)=V_2(n_6)=0\,.$$

Analogicznie dla $i=3,4,5,6$ tworzymy wielomiany $V_i(x)$ spełniające warunki

$$V_i(n_i)=1 \qquad \text{oraz} \qquad V_i(n_j)=0 \quad \text{dla} \quad j\neq i\,.$$

Wówczas wielomian co najwyżej piątego stopnia

$$W_0(x)=W(n_1)\cdot V_1(x)+W(n_2)\cdot V_2(x)+W(n_3)\cdot V_3(x)+$$
$$+W(n_4)\cdot V_4(x)+W(n_5)\cdot V_5(x)+W(n_6)\cdot V_6(x)$$

ma współczynniki wymierne, a ponadto $W_0(n_i)=W(n_i)$ dla $i=1,2,3,4,5,6$. Ponieważ wielomian $W_0(x)-W(x)$ jest stopnia co najwyżej piątego i ma co najmniej 6 miejsc zerowych, jest on wielomianem tożsamościowo równym 0. W konsekwencji $W(x)=W_0(x)$. Tym samym wykazaliśmy, że wielomian $W(x)$ ma współczynniki wymierne.