Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 164 (20/2018)
Piątek, 18 maja 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1108–1115** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1108. Zapisz liczbę 41 używając czterech czwórek.

1109. Zapisz liczbę 82 używając cyfr 4, 5 i 8 (każdej tylko raz).

1110. Zapisz liczbę 123 używając trzech trójek.

1111. Zapisz liczbę 123 używając cyfr 4, 9 i 9. Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

1112. Zapisz liczbę 164 używając cyfr 4, 4 i 7.

1113. Zapisz liczbę 1640 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

1114. Zapisz liczbę 16400 używając czterech czwórek.

1115. Zapisz liczbę 164164 używając cyfr 3, 4, 4 i 8.

Wielomiany

1116. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+49) \pmod 7 .$$

1117. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+25) \pmod 5 .$$

1118. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+27) \pmod 3 .$$

1119. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+32) \pmod 2 .$$

Rozwiązania zadań 1098–1107

1098. $95=\sqrt{7!+0!}+4!$ **1099.** $272=6^4-4^5=45\cdot 6+\sqrt{4}$ **1100.** $393=\sqrt{\frac{13!}{8!}+9}$

Drugie rozwiązanie zadania **1099** podał Wojtek Łach.

1101. Nie wynika. Rozważmy bowiem wielomian

$$W(x)=\frac{x^5+x}{2} .$$

Wielomian ten przyjmuje wartości całkowite dla wszystkich argumentów całkowitych, ale jego współczynniki nie są całkowite.

1102. Z rozwiązania zadania **1097** zamieszczonego w **Trapezie 163** nietrudno wywnioskować, że mianowniki wyrażeń definiujących wielomiany $V_i(x)$ w przypadku, gdy n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 są kolejnymi liczbami całkowitymi, z dokładnością do znaku są równe 120, 24 i 12. Zatem wielomian $120 \cdot W(x)$ ma współczynniki całkowite.

Z drugiej strony przykład wielomianu

$$W(x) = \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4)}{120},$$

w którym współczynnik przy x^5 jest równy 1/120, pokazuje, że liczby 120 nie można zastąpić mniejszą.

1103. Rozumując analogicznie jak w zadaniu **1102** stwierdzamy, że wielomian

$$V(x) = 7! \cdot W(x) = 5040 \cdot W(x)$$

ma współczynniki całkowite. Wobec tego dla każdej liczby całkowitej dodatniej m oraz każdej liczby całkowitej n zachodzi przystawanie

$$V(n) \equiv V(n+m) \pmod{m} .$$

W szczególności

$$V(n) \equiv V(n+p) \pmod{p} ,$$

czyli

$$5040 \cdot W(n) \equiv 5040 \cdot W(n+p) \pmod{p} .$$

Ponieważ liczba pierwsza p jest większa od 7, liczby p i 5040 są względnie pierwsze. Można więc podzielić kongruencję modulo p stronami przez 5040, co prowadzi do

$$W(n) \equiv W(n+p) \pmod{p} .$$

1104. Nie wynika. Na przykład wielomian

$$W(x) = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6)}{5040}$$

przyjmuje całkowite wartości dla wszystkich argumentów całkowitych, ale

$$W(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad W(7) = 1 ,$$

skąd

$$W(0) \not\equiv W(7) \pmod{7} .$$

1105. Nie wynika. Rozważając wielomian $W(x)$ z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$W(2) = 0 \qquad \text{i} \qquad W(7) = 1 ,$$

skąd

$$W(2) \not\equiv W(7) \pmod{5} .$$

1106. Nie wynika. Rozważając wielomian $W(x)$ z poprzedniego zadania otrzymujemy $W(4) = 0$ oraz $W(7) = 1$, skąd $W(4) \not\equiv W(7) \pmod{3}$.

1107. Nie wynika. Rozważając wielomian $W(x)$ z poprzedniego zadania otrzymujemy $W(5) = 0$ oraz $W(7) = 1$, skąd $W(5) \not\equiv W(7) \pmod{2}$.