Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 165 (21/2018)
Piątek, 25 maja 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1120**, **1121** i **1122** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1120. Zapisz liczbę 207 używając cyfr 2, 3 i 9 (każdej tylko raz).

1121. Zapisz liczbę 208 używając cyfr 2, 3 i 9 (każdej tylko raz).

1122. Zapisz liczbę 214 używając cyfr 2, 3 i 9 (każdej tylko raz).

Wielomiany

1123. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+9) \pmod 3 .$$

1124. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+16) \pmod 2 .$$

1125. Na potrzeby **Trapezu** liczbę całkowitą dodatnią N będziemy nazywać *superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{N}$.

Chcąc udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb superzłożonych, rozważamy liczby $n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$ oraz n^2, które są prawie superzłożone. Wprawdzie *prawie* robi dużą różnicę, ale w tym wypadku nietrudno sobie z tym poradzić — jak? Do zakończenia dowodu potrzebujemy wykazać, że liczby postaci n^2+1 są superzłożone dla nieskończenie wielu n. Jak to zrobić?

1126. Na potrzeby tego zadania liczbę całkowitą dodatnią N będziemy nazywać *3-superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt[3]{N}$.

Chcąc udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele par kolejnych liczb 3-superzłożonych, rozważamy liczby $n^3-1=(n-1)\cdot(n^2+n+1)$ oraz n^3. Najtrudniejszym elementem dowodu jest wykazanie, że liczby postaci n^2+n+1 są superzłożone dla nieskończenie wielu n. Jak to zrobić?

Rozwiązania zadań 1108–1119

1108. $41=\sqrt{\dfrac{(4+4)!+4!}{4!}}$ **1109.** $82=4!+58$ **1110.** $123=\dfrac{(3!)!}{3!}+3$

1111. $123=(9-4)!+\sqrt{9}=99+4!=\sqrt{\dfrac{9!}{4!}+9}$ **1112.** $164=4!\cdot 7-4$

1113. $1640=\dfrac{7!-5!}{\sqrt{9}}$ **1114.** $16400=4\cdot\left(4+\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}\right)$ **1115.** $164164=4\cdot(8!+(3!)!)+4$

1116. Rozumując analogicznie jak w zadaniu **1103** stwierdzamy, że wielomian

$$V(x)=7!\cdot W(x)=5040\cdot W(x)$$

ma współczynniki całkowite. Wobec tego dla każdej liczby całkowitej dodatniej m oraz każdej liczby całkowitej n zachodzi przystawanie

$$V(n) \equiv V(n+m) \pmod{m} .$$

W szczególności

$$V(n) \equiv V(n+49) \pmod{49} ,$$

czyli

$$5040 \cdot W(n) \equiv 5040 \cdot W(n+49) \pmod{49} .$$

Powyższą kongruencję możemy podzielić stronami przez 5040 dzieląc modulus przez $\mathrm{NWD}(5040,\, 49) = 7$. Otrzymujemy

$$W(n) \equiv W(n+49) \pmod{7} .$$

Uwaga: W połączeniu z zadaniem **1104** wnioskujemy, że jeżeli wielomian siódmego stopnia przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych, to reszty z dzielenia jego wartości przez 7 tworzą ciąg okresowy o okresie 49, ale niekoniecznie o okresie 7.

1117. Rozumując jak w zadaniu poprzednim dochodzimy do

$$5040 \cdot W(n) \equiv 5040 \cdot W(n+25) \pmod{25} .$$

Powyższą kongruencję możemy podzielić stronami przez 5040 dzieląc modulus przez $\mathrm{NWD}(5040,\, 25) = 5$. Otrzymujemy

$$W(n) \equiv W(n+25) \pmod{5} .$$

Uwaga: W połączeniu z zadaniem **1105** wnioskujemy, że jeżeli wielomian siódmego stopnia przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych, to reszty z dzielenia jego wartości przez 5 tworzą ciąg okresowy o okresie 25, ale niekoniecznie o okresie 5.

1118. Rozumując jak w zadaniu poprzednim dochodzimy do

$$5040 \cdot W(n) \equiv 5040 \cdot W(n+27) \pmod{27} .$$

Powyższą kongruencję możemy podzielić stronami przez 5040 dzieląc modulus przez $\mathrm{NWD}(5040,\, 27) = 9$. Otrzymujemy

$$W(n) \equiv W(n+27) \pmod{3} .$$

Uwaga: W połączeniu z zadaniem **1106** wnioskujemy, że jeżeli wielomian siódmego stopnia przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych, to reszty z dzielenia jego wartości przez 3 tworzą ciąg okresowy o okresie 27, ale niekoniecznie o okresie 3. Czy zawsze tworzą ciąg o okresie 9? To pytanie jest przedmiotem zadania **1123**.

1119. Rozumując jak w zadaniu poprzednim dochodzimy do

$$5040 \cdot W(n) \equiv 5040 \cdot W(n+32) \pmod{32} .$$

Powyższą kongruencję możemy podzielić stronami przez 5040 dzieląc modulus przez $\mathrm{NWD}(5040,\, 32) = 16$. Otrzymujemy

$$W(n) \equiv W(n+32) \pmod{2} .$$