Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 166 (22/2018)

Środa, 30 maja 2018 r.

Łamigłówki i zadania na długi weekend

W łamigłówkach **1127**, **1128** i **1129** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1127. Zapisz liczbę 361 używając cyfr 2, 2 i 3.

1128. Zapisz liczbę 363 używając cyfr 3, 5 i 5.

1129. Zapisz liczbę 365 używając cyfr 3, 5 i 5.

Wielomiany

1130. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ przyjmuje wartości całkowite dla argumentów całkowitych. Rozstrzygnij, czy stąd wynika, że dla każdej liczby całkowitej n zachodzi kongruencja

$$W(n) \equiv W(n+4) \pmod 2 .$$

1131. Wielomian siódmego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $W(x)$ spełnia warunek

$$W(n) = 2^n \qquad \text{dla} \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, 7.$$

Udowodnij istnienie takiej liczby naturalnej $n > 7$, że $W(n)$ jest potęgą dwójki.

1132. Na potrzeby **Trapezu** liczbę całkowitą dodatnią N będziemy nazywać *superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{N}$.

Chcąc udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb superzłożonych, rozważamy liczby $n-1 = (n-1)\cdot(n+1)$ oraz n^2, które są prawie superzłożone. Wprawdzie *prawie* robi dużą różnicę, ale w tym wypadku nietrudno sobie z tym poradzić. Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że liczby postaci n^2-2 są superzłożone dla nieskończenie wielu n. Jak to zrobić?

1133. Liczby n^2-49, n^2-25 oraz n^2-1 są prawie superzłożone i tworzą postęp arytmetyczny. Na ich podstawie udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb superzłożonych.

Rozwiązania zadań 1120–1126

1120. $207 = 23 \cdot 9$ **1121.** $208 = (3!)! - 2^9$ **1122.** $214 = (3!)^{\sqrt{9}} - 2$

1123. Wynika. Dla każdego wielomianu $W(x)$ co najwyżej ósmego stopnia prawdziwa jest tożsamość

$$W(x+9) = \sum_{k=0}^{8} \binom{9}{k} \cdot (-1)^k \cdot W(x+k)\,,$$

skąd wobec $\binom{9}{k} \equiv 0 \pmod 3$ dla $k = 1, 2, \ldots, 8$ otrzymujemy

$$W(n+9) \equiv W(n) \pmod 3 .$$

1124. Wynika. Dla każdego wielomianu $W(x)$ co najwyżej siódmego stopnia prawdziwa jest tożsamość

$$W(x+8) = \sum_{k=0}^{7} \binom{8}{k} \cdot (-1)^{k+1} \cdot W(x+k)\,,$$

skąd wobec $\binom{8}{k} \equiv 0 \pmod 2$ dla $k = 1, 2, \ldots, 7$ otrzymujemy

$$W(n+8) \equiv W(n) \pmod 2 ,$$

co jest warunkiem mocniejszym niż podana w treści zadania kongruencja

$$W(n)\equiv W(n+16)\ (\mathrm{mod}\ 2)\ .$$

1125. Przyjmując $n=2m^2$ otrzymujemy

$$n^2+1=4m^4+1=\left(2m^2-2m+1\right)\cdot\left(2m^2+2m+1\right)\ ,$$

więc w tym wypadku liczba n^2+1 jest prawie superzłożona. Do zakończenia rozwiązania wystarczy tak dobrać m, aby liczby $n+1=2m^2+1$ oraz $2m^2+2m+1$ były złożone. W tym celu wystarczy przyjąć, że liczba $2m^2+1$ jest podzielna przez 3 (co ma miejsce, gdy m nie jest podzielne przez 3), a liczba $2m^2+2m+1$ jest podzielna przez 5 (co ma miejsce, gdy m daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1 lub 3).

Przyjmując $m=15k+1$, czyli w konsekwencji $n=450k^2+60k+2$, otrzymujemy:

$$n^2-1=202500k^4+54000k^3+5400k^2+240k+3=3\cdot\left(150k^2+20k+1\right)\cdot\left(450k^2+60k+1\right)\ ,$$

$$n^2=202500k^4+54000k^3+5400k^2+240k+4=4\cdot(15k+1)^4\ ,$$

$$n^2+1=202500k^4+54000k^3+5400k^2+240k+5=5\cdot\left(90k^2+18k+1\right)\cdot\left(450k^2+30k+1\right)\ .$$

1126. Przyjmując $n=m^2$ otrzymujemy

$$n^2+n+1=m^4+m^2+1=\left(m^2-m+1\right)\cdot\left(m^2+m+1\right)\ ,$$

więc w tym wypadku liczba n^2+n+1 jest prawie superzłożona. Do zakończenia rozwiązania wystarczy tak dobrać m, aby liczba m^2+m+1 była złożona. W tym celu wystarczy przyjąć, że liczba m^2+m+1 jest podzielna przez 3, co ma miejsce, gdy m daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1.

Uwaga: Zasadniczą częścia rozwiązania jest rozkład wielomianu szóstego stopnia x^6-1 na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego:

$$x^6-1=(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)\ .$$

Wychodząc od rozkładu

$$x^{30}-1=(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\cdot\left(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1\right)\cdot\left(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1\right)$$

możemy udowodnić istnienie nieskończenie wielu par kolejnych liczb $n^{30}-1$ i n^{30} o dzielnikach pierwszych poniżej n^8.

Z kolei wielomian $x^{210}-1$ rozkłada się na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej 48, co prowadzi do par kolejnych liczb o dzielnikach pierwszych poniżej pierwiastka 4-go stopnia z rozkładanej liczby.

Wiadomo, że wielomian x^k-1 rozkłada się na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej $\varphi(k)$ (funkcja Eulera). Są to tzw. wielomiany cyklotomiczne. Wiadomo też, że iloraz $\varphi(k)/k$ może być dowolnie małą liczbą dodatnią. Wynika stąd, że zastępując w definicji superzłożoności pierwiastek kwadratowy pierwiastkiem dowolnego stopnia, otrzymamy pary kolejnych liczb o tak wzmocnionej własności superzłożoności — a nawet trójki kolejnych liczb, jeśli rozważyć liczby n^k-1, n^k, n^k+1. Wiadomo bowiem, że wielomian x^k+1 rozkłada się na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej $\varphi(2k)$.