Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 167 (23/2018)
Piątek, 8 czerwca 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1134**, **1135** i **1136** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1134. Zapisz liczbę 367 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1135. Zapisz liczbę 375 używając cyfr 3, 5 i 6 (każdej tylko raz).

1136. Zapisz liczbę 377 używając cyfr 3, 4 i 7 (każdej tylko raz).

Wielomiany

1137. Na potrzeby **Trapezu** liczbę całkowitą dodatnią N będziemy nazywać *superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{N}$.

W zadaniu **1133** udowodniliśmy, że istnieje nieskończenie wiele trójek kolejnych liczb superzłożonych. W tym celu wyszliśmy od liczb n^2-49, n^2-25 oraz n^2-1, które są prawie superzłożone i tworzą trójwyrazowy postęp arytmetyczny. Przedłużając ten postęp do postępu czterowyrazowego udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek kolejnych liczb superzłożonych.

1138. Podaj przykład wielomianu $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, mającego możliwie duży stopień, o następujących własnościach:
• wielomian $W(x)$ rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych o współczynnikach całkowitych,
• wielomian $W(x)+1$ rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązania zadań 1127–1133

1127. $361=\frac{(3!)!+2}{2}$ **1128.** $363=5!+3^5$ **1129.** $365=5!\cdot 3+5$

1130. Nie wynika. Na przykład wielomian

$$W(x)=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)}{5040}$$

przyjmuje całkowite wartości dla wszystkich argumentów całkowitych, ale

$$W(3)=0 \qquad \text{i} \qquad W(7)=1\,,$$

skąd

$$W(3)\not\equiv W(7) \pmod 2\ .$$

1131. Zauważmy, że wielomian

$$W(x)=\sum_{k=0}^{7}\binom{x}{k}\,,$$

gdzie

$$\binom{x}{k}=\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-k+2)\cdot(x-k+1)}{k!}\,,$$

spełnia warunki zadania. Istotnie, wielomian ten ma siódmy stopień, a dla $n=0,1,2,\ldots,7$ jego wartość jest równa 2^n jako suma wyrazów n-tego wiersza trójkąta Pascala. Zauważmy przy tym, że $\binom{n}{k}=0$ dla $n<k$.

Dla $n=15$ wartość wielomianu jest sumą połowy wyrazów 15-go wiersza trójkąta Pascala, skąd $W(15)=2^{14}$.

1132. Do rozwiązania zadania potrzebujemy odpowiedniej tożsamości wielomianowej, która po odpowiednim podstawieniu pozwoli rozłożyć wielomian $W(x)=x^2-2$ na czynniki. Spróbujemy dobrać taki wielomian kwadratowy $V(x)$, aby wielomian czwartego stopnia $W(V(x))$ rozkładał się na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych. Chcemy więc, aby wielomian $W(V(x))$ miał pierwiastek będący rozwiązaniem równania kwadratowego. Ponieważ równanie $W(V(x))=0$ jest równoważne równaniu $V(x)=\pm\sqrt{2}$, dobierzemy $V(x)$ tak, aby

$$V\left(a+b\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$$

dla odpowiednio dobranych liczb wymiernych a i b.

Oznaczając $y=1+\sqrt{2}$ otrzymujemy

$$\sqrt{2}=\frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}\,.$$

Ponieważ chcielibyśmy uzyskać wielomian o współczynnikach całkowitych, podstawimy $y=2z+1$, co prowadzi do

$$\sqrt{2}=2z^2+2z-1\,,$$

gdzie $z=\sqrt{2}/2$.

Ostatecznie przyjmiemy

$$V(x)=2x^2+2x-1\,.$$

W konsekwencji

$$W(V(x))=\left(2x^2+2x-1\right)^2-2=4x^4+8x^3-4x-1=\left(2x^2-1\right)\cdot\left(2x^2+4x+1\right)\,.$$

Dla rozwiązania zadania przyjmiemy więc $n=2m^2+2m-1$ i zażądamy, aby liczby $n=2m^2+2m-1$ oraz $2m^2+4m+1$ były złożone. W tym celu zauważamy, że jeżeli m daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, to liczba $2m^2+2m-1$ jest podzielna przez 3, natomiast liczba $2m^2+4m+1$ jest podzielna przez 7 jeśli tylko liczba m przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1 lub 4.

1133. Podane liczby n^2-49, n^2-25 i n^2-1 tworzą postęp arytmetyczny o różnicy 24. Możemy z nich otrzymać trzy kolejne liczby całkowite, jeśli podzielimy je przez 24, o ile oczywiście będą one przez 24 podzielne. Tak się stanie, jeśli n nie będzie podzielne przez 2 ani przez 3. Przyjmując dla uproszczenia $n=12m+1$ otrzymujemy

$$\frac{n^2-49}{24}=6m^2+m-2=(2m-1)\cdot(3m+2)\,,$$

$$\frac{n^2-25}{24}=6m^2+m-1=(2m+1)\cdot(3m-1)\,,$$

$$\frac{n^2-1}{24}=6m^2+m=m\cdot(6m+1)\,.$$

Trójkę kolejnych liczb superzłożonych otrzymamy, gdy zapewnimy złożoność liczb $3m+2$, $3m-1$ i $6m+1$. W tym celu przyjmujemy, że:

- $m\equiv 0 \pmod 2$ — wtedy liczba $3m+2$ jest podzielna przez 2,
- $m\equiv 2 \pmod 5$ — wtedy liczba $3m-1$ jest podzielna przez 5,
- $m\equiv 1 \pmod 7$ — wtedy liczba $6m+1$ jest podzielna przez 7.

Powyższe warunki są spełnione przez liczby $m\equiv 22 \pmod{70}$.