Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO
TRAPEZ
Nr 168 (24/2018)
Piątek, 15 czerwca 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1139**, **1140** i **1141** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1139. Zapisz liczbę 630 używając cyfr 4, 4 i 9.

1140. Zapisz liczbę 631 używając cyfr 4, 5 i 9 (każdej tylko raz).

1141. Zapisz liczbę 632 używając cyfr 4, 5 i 9 (każdej tylko raz).

Wielomiany

1142. Na potrzeby **Trapezu** liczbę całkowitą dodatnią N będziemy nazywać *superzłożoną*, jeżeli każdy jej dzielnik pierwszy jest mniejszy od $\sqrt{N}$.

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele piątek kolejnych liczb superzłożonych.

Rozwiązania zadań 1134–1138

1134. $367=7^3+4!=\dfrac{(3!)!}{\sqrt{4}}+7$ **1135.** $375=3\cdot\sqrt{5^6}$ **1136.** $377=(3!)!-\sqrt{\sqrt{\sqrt{7^{4!}}}}$

1137. Do rozwiązania zadania potrzebujemy odpowiedniej tożsamości wielomianowej, która po odpowiednim podstawieniu pozwoli rozłożyć wielomian $W(x)=x^2-73$ na czynniki. Spróbujemy dobrać taki wielomian kwadratowy $V(x)$, aby wielomian czwartego stopnia $W(V(x))$ rozkładał się na iloczyn dwóch wielomianów kwadratowych. Chcemy więc, aby wielomian $W(V(x))$ miał pierwiastek będący rozwiązaniem równania kwadratowego. Ponieważ równanie $W(V(x))=0$ jest równoważne równaniu $V(x)=\pm\sqrt{73}$, dobierzemy $V(x)$ tak, aby

$$V\left(a+b\sqrt{73}\right)=\sqrt{73}$$

dla odpowiednio dobranych liczb wymiernych a i b.

Oznaczając $y=1+\sqrt{73}$ otrzymujemy

$$\sqrt{73}=\frac{y^2}{2}-37\,.$$

Ponieważ chcielibyśmy uzyskać wielomian o współczynnikach całkowitych, podstawimy $y=2z$, co prowadzi do

$$\sqrt{73}=2z^2-37\,,$$

gdzie $z=\sqrt{73}/2$.

Ostatecznie przyjmiemy

$$V(x)=2x^2-37\,.$$

W konsekwencji

$$W(V(x))=\left(2x^2-37\right)^2-73=4x^4-148x^2+1296=4\cdot\left(x^2-x-18\right)\cdot\left(x^2+x-18\right)\,.$$

Dla rozwiązania zadania przyjmiemy więc $n=2m^2-37$. Dla łatwego podzielenia otrzymanych wyrażeń przez 24 podstawimy $m=6k+1$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{n^2-73}{24}=216k^4+144k^3-186k^2-70k+48=2\cdot\left(6k^2+k-3\right)\cdot\left(18k^2+9k-8\right)\,,$$

$$\frac{n^2-49}{24}=216k^4+144k^3-186k^2-70k+49=\left(12k^2+4k-7\right)\cdot\left(18k^2+6k-7\right)\,,$$

$$\frac{n^2-25}{24}=216k^4+144k^3-186k^2-70k+50=2\cdot(2k-1)\cdot(6k+5)\cdot\left(9k^2+3k-5\right),$$

$$\frac{n^2-1}{24}=216k^4+144k^3-186k^2-70k+51=\left(6k^2+2k-3\right)\cdot\left(36k^2+12k-17\right).$$

Czwórkę kolejnych liczb superzłożonych otrzymamy, gdy zapewnimy złożoność liczb $18k^2+9k-8$, $18k^2+6k-7$ i $36k^2+12k-17$. W tym celu przyjmujemy, że:

- $k\equiv 0 \pmod 2$ — wtedy liczba $18k^2+9k-8$ jest podzielna przez 2,
- $k\equiv 4 \pmod 5$ — wtedy liczba $18k^2+6k-7$ jest podzielna przez 5,
- $k\equiv 3 \pmod 7$ — wtedy liczba $36k^2+12k-17$ jest podzielna przez 7.

Uwaga: Inne rozwiązanie zadania może być oparte o dołączenie do postępu arytmetycznego wyrazu n^2+23 i tożsamość

$$\left(2x^2+11\right)^2+23=4\cdot\left(x^2-x+6\right)\cdot\left(x^2+x+6\right).$$

1138. Podamy przykład wielomianu stopnia 12 o żądanych własnościach.

Jako punkt wyjścia przyjmiemy równość

$$22^k+61^k+86^k+127^k+140^k+151^k=35^k+47^k+94^k+121^k+146^k+148^k$$

prawdziwą dla $k=2,4,6,8,10$.

Z równości tej wynika (bynajmniej nie prosto, ale dowód pomijamy, podobnie jak dowody dalszych nieoczywistych kroków), że wielomiany

$$P(x)=\left(x^2-22^2\right)\cdot\left(x^2-61^2\right)\cdot\left(x^2-86^2\right)\cdot\left(x^2-127^2\right)\cdot\left(x^2-140^2\right)\cdot\left(x^2-151^2\right)$$

oraz

$$Q(x)=\left(x^2-35^2\right)\cdot\left(x^2-47^2\right)\cdot\left(x^2-94^2\right)\cdot\left(x^2-121^2\right)\cdot\left(x^2-146^2\right)\cdot\left(x^2-148^2\right)$$

różnią się o stałą. W rzeczywistości zachodzi tożsamość

$$P(x)+674402945596760540160000=Q(x).$$

Wielomianem spełniającym warunki zadania jest wielomian

$$W(x)=\frac{P(2406725881560x+690140467786)}{674402945596760540160000}=$$
$$=(1152646495x+330527044)\cdot(1189093815x+340978492)\cdot$$
$$\cdot(1469307620x+421331177)\cdot(6077590610x+1742778959)\cdot$$
$$\cdot(7078605534x+2029824905)\cdot(77636318760x+22262595737)\cdot$$
$$\cdot(126669783240x+36323182523)\cdot(160448392104x+46009364509)\cdot$$
$$\cdot(160448392104x+46009364515)\cdot(171908991540x+49295747689)\cdot$$
$$\cdot(185132760120x+53087728301)\cdot(802241960520x+230046822553).$$

Wówczas

$$W(x)+1=(159597207x+45765283)\cdot(165889570x+47569649)\cdot$$
$$\cdot(3166744581x+908079563)\cdot(4862072488x+1394223167)\cdot$$
$$\cdot(20224587240x+5799499729)\cdot(104640255720x+30006107293)\cdot$$
$$\cdot(114605994360x+32863831801)\cdot(133706993420x+38341137091)\cdot$$
$$\cdot(200560490130x+57511705661)\cdot(218793261960x+62740042537)\cdot$$
$$\cdot(802241960520x+230046822611)\cdot(1203362940780x+345070233967).$$