Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 169 (25/2018)
Piątek, 22 czerwca 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1143**, **1144** i **1145** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1143. Zapisz liczbę 20 używając cyfr 4, 6 i 6.

1144. Zapisz liczbę 109 używając cyfr 1, 3, 7 i 9 (każdej tylko raz).

1145. Zapisz liczbę 140 używając cyfr 1, 2, 3 i 9 (każdej tylko raz).

Wakacyjny quiz Trapezu

1146. Dla podanej liczby p podaj liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=20$, $q=\ldots$ **b)** $p=50$, $q=\ldots$ **c)** $p=60$, $q=\ldots$ **d)** $p=75$, $q=\ldots$

1147. Dla podanej liczby p podaj liczbę q o następującej własności: Jeżeli liczba dodatnia a jest mniejsza od liczby dodatniej b o $p\%$, to liczba b jest większa od liczby a o $q\%$.

a) $p=80$, $q=\ldots$ **b)** $p=90$, $q=\ldots$ **c)** $p=95$, $q=\ldots$ **d)** $p=99$, $q=\ldots$

1148. Liczbę naturalną n nazwiemy *szczęśliwą*, jeżeli istnieją takie dwa trójkąty równoboczne o bokach długości całkowitej, że jeden trójkąt ma pole większe o $n\%$ od pola drugiego trójkąta. Dla podanej liczby k podaj najmniejszą *szczęśliwą* liczbę n większą od k.

a) $k=10$, $n=\ldots$ **b)** $k=25$, $n=\ldots$ **c)** $k=50$, $n=\ldots$ **d)** $k=100$, $n=\ldots$

Rozwiązania zadań 1139–1142

1139. $630=\dfrac{9!}{4!\cdot 4!}$ **1140.** $631=5^4+\left(\sqrt{9}\right)!$ **1141.** $632=5!+\sqrt{4^9}$

1142. Zauważmy, że liczby

$$n^2-529,\qquad n^2-409,\qquad n^2-289,\qquad n^2-169,\qquad n^2-49$$

tworzą pięciowyrazowy postęp arytmetyczny, a cztery z nich są prawie superzłożone.

Do rozwiązania zadania potrzebujemy odpowiedniej tożsamości wielomianowej, która po odpowiednim podstawieniu pozwoli rozłożyć wielomian $W(x)=x^2-409$ na czynniki. Rozumując jak w zadaniu **1137** dochodzimy do

$$V(x)=2x^2-205$$

oraz

$$W(V(x))=\left(2x^2-205\right)^2-409=4x^4-820x^2+41616=4\cdot\left(x^2-x-102\right)\cdot\left(x^2+x-102\right).$$

Dla rozwiązania zadania przyjmiemy więc $n=2m^2-205$.

W celu łatwego podzielenia otrzymanych wyrażeń przez różnicę postępu arytmetycznego równą 120 podstawimy $m=30k+7$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{n^2-529}{120}=27000k^4+25200k^3+2670k^2-1498k+91=\left(150k^2+70k-7\right)\cdot\left(180k^2+84k-13\right),$$

$$\frac{n^2-409}{120}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+92=2\cdot\left(30k^2+13k-2\right)\cdot\left(450k^2+225k-23\right),$$

$$\frac{n^2-289}{120} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 93 = \left(60k^2+28k-3\right)\cdot\left(450k^2+210k-31\right),$$

$$\frac{n^2-169}{120} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 94 = 2\cdot\left(15k^2+7k-1\right)\cdot\left(900k^2+420k-47\right),$$

$$\frac{n^2-49}{120} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 95 = \left(90k^2+42k-5\right)\cdot\left(300k^2+140k-19\right).$$

Piątkę kolejnych liczb superzłożonych otrzymamy, gdy zapewnimy odpowiednią złożoność liczb $180k^2+84k-13$, $450k^2+225k-23$, $450k^2+210k-31$, $900k^2+420k-47$ i $300k^2+140k-19$. W tym celu przyjmujemy, że:

- $k\equiv 2 \pmod 5$ — wtedy liczba $180k^2+84k-13$ jest podzielna przez 5,
- $k\equiv 2 \pmod{17}$ — wtedy liczba $450k^2+225k-23$ jest podzielna przez 17,
- $k\equiv 2 \pmod{11}$ — wtedy liczba $450k^2+210k-31$ jest podzielna przez 11,
- $k\equiv 1 \pmod{19}$ — wtedy liczba $900k^2+420k-47$ jest podzielna przez 19,
- $k\equiv 2 \pmod 3$ — wtedy liczba $300k^2+140k-19$ jest podzielna przez 3.

Powyższe warunki sprowadzają się do

$$k\equiv 30857 \pmod{53295}\,.$$

W szczególności dla $k=30857$ otrzymujemy następującą piątkę kolejnych liczb superzłożonych:

$24478888952677319765735 = 5\cdot 13\cdot 241\cdot 2459\cdot 18539\cdot 72949\cdot 469891\,,$
$24478888952677319765736 = 2^3\cdot 3\cdot 17\cdot 103\cdot 191\cdot 320293\cdot 9521678203\,,$
$24478888952677319765737 = 11\cdot 1283\cdot 44528551\cdot 38952361999\,,$
$24478888952677319765738 = 2\cdot 7\cdot 19\cdot 53\cdot 40751\cdot 50069\cdot 850994999\,,$
$24478888952677319765739 = 3^2\cdot 311\cdot 389\cdot 262351\cdot 85695196399\,.$

A faktycznie nawet siódemkę, bo kolejne dwie liczby przypadkowo też są superzłożone:

$24478888952677319765740 = 2^2\cdot 5\cdot 3175169\cdot 13068127\cdot 29497249\,,$
$24478888952677319765741 = 163^2\cdot 3083\cdot 45673\cdot 6543098071\,.$

Uwaga: Można sprawdzić, że:

- najmniejszą liczbą superzłożoną jest liczba 8,
- najmniejszą parę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 63 i 64,
- najmniejszą trójkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 350, 351 i 352,
- najmniejszą czwórkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 1518, 1519, 1520 i 1521,
- najmniejszą piątkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 5828, 5829, 5830, 5831 i 5832,
- najmniejszą szóstkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 28032, 28033, 28034, 28035, 28036 i 28037,
- najmniejszą siódemkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 290783, 290784, 290785, 290786, 290787, 290788 i 290789,
- najmniejszą ósemkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 290783, 290784, 290785, 290786, 290787, 290788, 290789 i 290790,
- najmniejszą dziewiątkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 1255500, 1255501, 1255502, 1255503, 1255504, 1255505, 1255506, 1255507 i 1255508,
- najmniejszą dziesiątkę kolejnych liczb superzłożonych tworzą liczby 4325170, 4325171, 4325172, 4325173, 4325174, 4325175, 4325176, 4325177, 4325178 i 4325179.