Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1250**, **1251** i **1252** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1250. Zapisz liczbę 15 używając cyfr 2, 4 i 5 (każdej tylko raz).

1251. Zapisz liczbę 210 używając cyfr 2, 4 i 5 (każdej tylko raz).

1252. Zapisz liczbę 2^{211} używając cyfr 2, 2, 4 i 5.

Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 179 (35/2018)
Piątek, 31 sierpnia 2018 r.

Wielki powakacyjny quiz Trapezu

1253. Dla podanej liczby naturalnej podaj jej resztę z dzielenia przez 9.

a) 1234000000111, reszta = ... **b)** 1234000000222, reszta = ...

c) 1234000000404, reszta = ... **d)** 1234000000799, reszta = ...

1254. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba kn jest większa od liczby n o p%. Dla podanej liczby k podaj takie p, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $k=10$, $p=$ .... **b)** $k=20$, $p=$ ....

c) $k=50$, $p=$ .... **d)** $k=100$, $p=$ ....

1255. W pewnym kraju 10% dorosłych kobiet nie lubi szpinaku oraz 10% dorosłych mężczyzn nie lubi szpinaku. Jaki procent dorosłych mieszkańców tego kraju nie lubi szpinaku, jeżeli liczba dorosłych kobiet jest większa od liczby dorosłych mężczyzn

a) o 10% ? .... **b)** o 20% ? ....

c) o 30% ? .... **d)** o 40% ? ....

1256. Dla podanych a, b zapisz w postaci przedziału obustronnie otwartego zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych c, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c.

a) $a=3$, $b=4$, $c\in$ .... **b)** $a=5$, $b=10$, $c\in$ ....

c) $a=7$, $b=20$, $c\in$ .... **d)** $a=10$, $b=37$, $c\in$ ....

1257. Dla podanej liczby rzeczywistej x podaj taką liczbę wymierną w, że $x+w\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.

a) $x=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}$, $w=$ .... **b)** $x=\sqrt{\left(5-4\sqrt{2}\right)^2}$, $w=$ ....

c) $x=\sqrt{\left(7-5\sqrt{2}\right)^2}$, $w=$ .... **d)** $x=\sqrt{\left(9-7\sqrt{2}\right)^2}$, $w=$ ....

1258. Dla podanej liczby rzeczywistej x podaj taką liczbę wymierną w, że $x+w\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.

a) $x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $w=$ .... **b)** $x=\dfrac{1}{5-4\sqrt{2}}$, $w=$ ....

c) $x=\dfrac{1}{7-5\sqrt{2}}$, $w=$ .... **d)** $x=\dfrac{1}{9-7\sqrt{2}}$, $w=$ ....

1259. Podaj największy wspólny dzielnik liczb.

a) NWD(20!, 38) = ... **b)** NWD(20!, 41) = ...

c) NWD(20!, 46) = ... **d)** NWD(20!, 121) = ...

1260. Podaj największy wspólny dzielnik liczb.

a) NWD(2000, 2036) = ... **b)** NWD(3000, 3036) = ...

c) NWD(4000, 4036) = ... **d)** NWD(4500, 4536) = ...

1261. Podaj najmniejszą dodatnią miarę kąta α (wyrażoną w stopniach) taką, że

a) $\sin\alpha = \sin 2\alpha$, $\alpha =$ .... **b)** $\sin\alpha = \sin 3\alpha$, $\alpha =$ ....

c) $\sin\alpha = \sin 4\alpha$, $\alpha =$ .... **d)** $\sin\alpha = \sin 5\alpha$, $\alpha =$ ....

1262. Zapisz zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używaj różnicy zbiorów).

a) $(x-1)\cdot(x-2)^2 > 0$, ...

b) $(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)^3 > 0$, ...

c) $(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)^3\cdot(x-4)^4 > 0$, ...

d) $(x-1)\cdot(x-2)^2\cdot(x-3)^3\cdot(x-4)^4\cdot(x-5)^5 > 0$, ...

1263. Zapisz zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używaj różnicy zbiorów). Uważaj na kierunek nierówności.

a) $|x-4| < 2$, ...

b) $|x-6| > 5$, ...

c) $|x-8| > 8$, ...

d) $|x-10| < 11$, ...

1264. Zapisz zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używaj różnicy zbiorów). Uważaj na kierunek nierówności.

a) $|\log_5 x| < 2$, ... **b)** $|\log_4 x| > 3$, ...

c) $|\log_3 x| < 4$, ... **d)** $|\log_2 x| > 5$, ...

1265. Dany jest 15-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{15}$. Podaj (w stopniach) miarę kąta.

a) $\sphericalangle A_1A_2A_{15} =$ .... **b)** $\sphericalangle A_1A_3A_{15} =$ ....

c) $\sphericalangle A_1A_5A_{15} =$ .... **d)** $\sphericalangle A_1A_6A_{15} =$ ....

1266. Dany jest 18-kąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{18}$ wpisany w okrąg o promieniu 1. Dla podanej liczby n podaj zbiór **wszystkich** takich liczb $k \in \{1,2,3,\ldots,18\}$, że cięciwa A_nA_k ma długość 1.

a) $n=1$, $k \in \{$..................$\}$ **b)** $n=2$, $k \in \{$..................$\}$

c) $n=10$, $k \in \{$.................$\}$ **d)** $n=18$, $k \in \{$.................$\}$

1267. Zapisz rozwiązanie x podanego równania w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\log_4 8 = \log_9 x$, $x =$ .... **b)** $\log_4 9 = \log_x 81$, $x =$ ....

c) $3\cdot\log_{27} x = 2\cdot\log_3 5$, $x =$ .... **d)** $2\cdot\log_x 8 = \log_3 27$, $x =$ ....

1268. Zapisz podaną liczbę w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\log_{(2-\sqrt{3})}\left(2+\sqrt{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $\log_{(\sqrt{5}+2)}\left(\sqrt{5}-2\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1269. Zapisz podaną liczbę w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\log_4 3 \cdot \log_9 8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $\log_{25} 27 \cdot \log_3 5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\log_{27} 32 \cdot \log_8 81 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $\log_4 5 \cdot \log_{125} 128 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1270. Suma wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego n-wyrazowego $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\ldots, a_n$ jest równa $Aa_1 + Ba_2$. Dla podanej liczby n podaj takie liczby rzeczywiste A i B, aby powyższe zdanie było prawdziwe.

a) $n=3$, $A = \ldots\ldots$, $B = \ldots\ldots$ **b)** $n=4$, $A = \ldots\ldots$, $B = \ldots\ldots$

c) $n=5$, $A = \ldots\ldots$, $B = \ldots\ldots$ **d)** $n=6$, $A = \ldots\ldots$, $B = \ldots\ldots$

1271. Podaj największą wartość funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+10x+27}$, $\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+10x+30}$, $\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+10x+33}$, $\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+10x+36}$, $\ldots\ldots\ldots\ldots$

1272. Rozważamy wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniających nierówność $x^2+y^2 \leqslant 2x$. Podaj największą możliwą wartość wyrażenia:

a) x, $\ldots\ldots$ **b)** y, $\ldots\ldots$ **c)** x^2+y^2, $\ldots\ldots$ **d)** $x+y$, $\ldots\ldots$

1273. W miejscu kropek napisz taką liczbę rzeczywistą, aby w czworokąt wypukły o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) można było wpisać okrąg. Napisz **NIE**, jeśli taka liczba nie istnieje.

a) 5, 7, 5, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** 5, 7, 7, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) 5, 7, 4, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** 5, 7, 6, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1274. W miejscu kropek napisz taką liczbę rzeczywistą, aby w czworokącie wypukłym o bokach podanej długości (z zachowaniem kolejności) przekątne były prostopadłe. Napisz **NIE**, jeśli taka liczba nie istnieje.

a) 5, 7, 5, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** 5, 7, 7, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) 5, 7, 4, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** 5, 7, 6, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1275. Zapisz zbiór rozwiązań podanej nierówności w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów (nie używaj różnicy zbiorów).

a) $(|\log_3 x| - 1)^2 < 1$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $(|\log_3 x| - 1)^3 < 1$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $(|\log_3 x| - 2)^4 > 1$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d) $(|\log_3 x| - 2)^5 > 1$, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1276. Rozważamy liczbę $n = 12345678910111213\,14\ldots697071$ powstałą z połączenia zapisów dziesiętnych kolejnych liczb od 1 do 71. Dla podanej liczby d podaj resztę r z dzielenia liczby n przez d.

a) $d=3$, $r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b)** $d=4$, $r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $d=6$, $r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **d)** $d=15$, $r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1277. Dla podanej liczby k podaj taką liczbę naturalną $n \geqslant k+3$, że

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+3}=\binom{n+1}{k+3}.$$

a) $k=50$, $n=$ .... **b)** $k=200$, $n=$ ....

c) $k=1000$, $n=$ .... **d)** $k=2014$, $n=$ ....

1278. Dla podanych h_a, h_b zapisz w postaci przedziału obustronnie otwartego zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych h_c, że istnieje trójkąt o wysokościach długości h_a, h_b, h_c.

a) $h_a=2$, $h_b=2$, $h_c \in$ .... **b)** $h_a=10$, $h_b=15$, $h_c \in$ ....

c) $h_a=3$, $h_b=6$, $h_c \in$ .... **d)** $h_a=4$, $h_b=12$, $h_c \in$ ....

Odpowiedzi do zadań 1238–1249

1238. $516=\dfrac{9!}{6!}+5+7$ **1239.** $518=(7-5)^9+6$ **1240.** $529=\sqrt{6^7-95}$

1241. a) $\sqrt{x^2}<1$, $(\mathbf{-1},\, \mathbf{1})$
b) $\sqrt{x^2+2x+1}<3$, $(\mathbf{-4},\, \mathbf{2})$
c) $\sqrt{x^2+4x+4}>5$, $(-\infty,\, \mathbf{-7})\cup(\mathbf{3},\, +\infty)$
d) $\sqrt{x^2-2x+1}>7$, $(-\infty,\, \mathbf{-6})\cup(\mathbf{8},\, +\infty)$

1242. a) $\log_5 x<2$, $(\mathbf{0},\, \mathbf{25})$ **b)** $\log_3 x<-3$, $(\mathbf{0},\, \mathbf{1/27})$
c) $\log_2 x>5$, $(\mathbf{32},\, +\infty)$ **d)** $\log_6 x>-2$, $(\mathbf{1/36},\, +\infty)$

1243. a) $x=\sqrt{10}-3$, $n=\mathbf{6}$ **b)** $x=\sqrt{23}-\sqrt{21}$, $n=\mathbf{4}$
c) $x=\sqrt{35}-6$, $n=\mathbf{-12}$ **d)** $x=\sqrt{86}-\sqrt{83}$, $n=\mathbf{6}$

1244. a) $\beta=10^\circ$, $\alpha=\mathbf{40}^\circ$ **b)** $\beta=20^\circ$, $\alpha=\mathbf{35}^\circ$
c) $\beta=30^\circ$, $\alpha=\mathbf{30}^\circ$ **d)** $\beta=60^\circ$, $\alpha=\mathbf{15}^\circ$

1245. a) $q=22$, $p=\mathbf{25}$ **b)** $q=32$, $p=\mathbf{50}$
c) $q=55$, $p=\mathbf{100}$ **d)** $q=65$, $p=\mathbf{100}$

1246. a) $\log_2 x=1+\log_2 25$, $x=\mathbf{50}$ **b)** $\log_3 x=1+\log_3 15$, $x=\mathbf{45}$
c) $\log_3 x=2+\log_3 11$, $x=\mathbf{99}$ **d)** $\log_2 x=3+\log_2 11$, $x=\mathbf{88}$

1247. a) $f(x)=x^4+2x^2+2$, **2** **b)** $f(x)=x^6+2x^3+2$, **1**
c) $f(x)=x^8+4x^4+7$, **7** **d)** $f(x)=x^{10}+4x^5+7$, **3**

1248. a) $m=2$, $n=3$, $k=\mathbf{4}$ **b)** $m=3$, $n=4$, $k=\mathbf{5}$
c) $m=4$, $n=5$, $k=\mathbf{6}$ **d)** $m=5$, $n=6$, $k=\mathbf{7}$

1249. a) $\alpha=40^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=80^\circ$, $n=\mathbf{9}$
b) $\alpha=36^\circ$, $\beta=72^\circ$, $\gamma=72^\circ$, $n=\mathbf{5}$
c) $\alpha=20^\circ$, $\beta=50^\circ$, $\gamma=110^\circ$, $n=\mathbf{18}$
d) $\alpha=45^\circ$, $\beta=63^\circ$, $\gamma=72^\circ$, $n=\mathbf{20}$