Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 181 (37/2018)
Piątek, 14 września 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1282**, **1283** i **1284** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1282. Zapisz liczbę 19 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz). Podaj trzy istotnie różne rozwiązania.

1283. Zapisz liczbę 22 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

1284. Zapisz liczbę 23 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

Reszty z dzielenia kwadratów przez 8

Zapamiętaj:

Kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 8 jedną z reszt: 0, 1, 4.

Aby to udowodnić, rozważymy trzy przypadki.

1° Kwadrat liczby podzielnej przez 4 jest podzielny przez 8 (a nawet przez 16), czyli przy dzieleniu przez 8 daje resztę 0.

2° Kwadrat liczby parzystej niepodzielnej przez 4 jest podzielny przez 4, ale nie przez 8, czyli przy dzieleniu przez 8 daje resztę 4.

3° Kwadrat liczby nieparzystej daje przy dzieleniu przez 8 resztę 1.

Zajmiemy się dowodem najmniej oczywistego przypadku **3**°.

Sposób I: Niech $n=2k+1$ będzie liczbą nieparzystą. Wówczas

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1\,.$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że liczba $k(k+1)$ jest parzysta jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Sposób II: Zauważmy, że każda liczba nieparzysta sąsiaduje z liczbą podzielną przez 4. Przyjmijmy więc $n=4k\pm1$. Wówczas

$$n^2=(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1=8\left(2k^2\pm k\right)+1\,.$$

Sposób III: Niech n będzie liczbą nieparzystą. Wówczas

$$n^2-1=(n-1)(n+1)\,.$$

Ponieważ liczby $n-1$ oraz $n+1$ są parzyste, a jedna z nich jest podzielna przez 4, liczba $(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 8.

1285. Których reszt nie może dawać przy dzieleniu przez 8 liczba postaci a^2+b^2, gdzie a i b są liczbami całkowitymi?

1286. Której reszty nie może dawać przy dzieleniu przez 8 liczba postaci $a^2+b^2+c^2$, gdzie a, b i c są liczbami całkowitymi?

1287. Jaka może być reszta z dzielenia przez 8 liczby postaci $p_1^2+p_2^2+p_3^2$, gdzie p_1, p_2 i p_3 są liczbami pierwszymi?

1288. Jaka może być reszta z dzielenia przez 8 liczby postaci $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2$, gdzie p_1, p_2, p_3 i p_4 są różnymi liczbami pierwszymi?

1289. Jaka może być reszta z dzielenia przez 8 liczby postaci $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{77}^2$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1290. Czy kwadrat liczby całkowitej może mieć trzycyfrową końcówkę 149?

Reszty z dzielenia kwadratów przez 3

Zapamiętaj:

Kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 3 jedną z reszt: 0, 1.

Aby to udowodnić, rozważymy dwa przypadki.

1° Kwadrat liczby podzielnej przez 3 jest podzielny przez 3 (a nawet przez 9), czyli przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0.

2° Kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1.

Zajmiemy się dowodem mniej oczywistego przypadku **2**°.

Sposób I: Zauważmy, że każda liczba niepodzielna przez 3 sąsiaduje z liczbą podzielną przez 3. Przyjmijmy więc $n=3k\pm1$. Wówczas

$$n^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3\left(3k^2\pm2k\right)+1\,.$$

Sposób II: Niech n będzie liczbą niepodzielną przez 3. Wówczas

$$n^2-1=(n-1)(n+1)\,.$$

Ponieważ wśród trzech kolejnych liczb $n-1$, n oraz $n+1$ jedna jest podzielna przez 3, a nie jest to liczba n, liczba $(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 3.

1291. Jaka może być reszta z dzielenia przez 3 liczby postaci $p_1^2+p_2^2+p_3^2$, gdzie p_1, p_2 i p_3 są różnymi liczbami pierwszymi?

1292. Jaka może być reszta z dzielenia przez 3 liczby postaci $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{77}^2$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_{77}$ są różnymi liczbami pierwszymi?

1293. Których reszt nie dają przy dzieleniu przez 9 kwadraty liczb całkowitych?

1294. Których reszt nie dają przy dzieleniu przez 9 sumy dwóch kwadratów liczb całkowitych?

1295. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, że liczba p^2+2 jest pierwsza.

1296. Udowodnij, że równanie

$$m^2+1=3n^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych m, n.

1297. Czy kwadrat liczby całkowitej może mieć sumę cyfr równą 149?

Odpowiedzi do zadań 1279–1281

1279. $180=\sqrt{\dfrac{10!}{112}}$ **1280.** $180=\dfrac{((1+2)!)!}{2+2}$ **1281.** $180=5!+\sqrt{(3!)!\cdot5}$