Autorski Tygodnik Matematyczny
JAROSŁAWA WRÓBLEWSKIEGO

TRAPEZ

Nr 182 (38/2018)
Piątek, 21 września 2018 r.

Łamigłówki i zadania na weekend

W łamigłówkach **1298**, **1299** i **1300** oprócz tworzenia liczb z podanych cyfr wolno użyć w dowolnej ilości pięciu działań (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie), silni, pierwiastka kwadratowego oraz nawiasów dla oznaczenia kolejności działań.

1298. Zapisz liczbę 33 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1299. Zapisz liczbę 41 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz). Podaj dwa istotnie różne rozwiązania.

1300. Zapisz liczbę 53 używając cyfr 5, 7 i 9 (każdej tylko raz).

Reszty z dzielenia kwadratów przez 5

Zapamiętaj:

Kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 5 jedną z reszt: 0, 1, 4.

Aby to udowodnić, rozważymy dwa przypadki.

1° Kwadrat liczby podzielnej przez 5 jest podzielny przez 5 (a nawet przez 25), czyli przy dzieleniu przez 5 daje resztę 0.

2° Kwadrat liczby niepodzielnej przez 5 daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1 albo 4.

Zajmiemy się dowodem mniej oczywistego przypadku **2**°.

Sposób I: Dla $n=5k\pm 1$ otrzymujemy

$$n^2=(5k\pm 1)^2=25k^2\pm 10k+1=5\left(5k^2\pm 2k\right)+1\,,$$

a dla $n=5k\pm 2$ mamy

$$n^2=(5k\pm 2)^2=25k^2\pm 20k+4=5\left(5k^2\pm 4k\right)+4\,.$$

Sposób II: Niech n będzie liczbą niepodzielną przez 5. Ponieważ wśród pięciu kolejnych liczb $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ oraz $n+2$ jedna jest podzielna przez 5, a nie jest to liczba n, jedna z liczb

$$n^2-1=(n-1)(n+1) \qquad \text{oraz} \qquad n^2-4=(n-2)(n+2)$$

jest podzielna przez 5.

1301. Które cyfry mogą wystąpić jako cyfra jedności kwadratu liczby całkowitej?

1302. Wyznacz wszystkie takie liczby pierwsze p, że liczby p^2+4 i p^2+6 są pierwsze.

1303. Udowodnij, że równanie

$$m^2+2=5n^2$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych m, n.

Reszty z dzielenia sześcianów przez 9

Zapamiętaj:

Sześcian liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 9 jedną z reszt: 0, 1, 8.

Aby to udowodnić, rozważymy dwa przypadki.

1° Sześcian liczby podzielnej przez 3 jest podzielny przez 9 (a nawet przez 27), czyli przy dzieleniu przez 9 daje resztę 0.

2° Sześcian liczby niepodzielnej przez 3 daje przy dzieleniu przez 9 resztę 1 albo 8.
Zajmiemy się dowodem mniej oczywistego przypadku **2**°.

Zauważmy, że każda liczba niepodzielna przez 3 sąsiaduje z liczbą podzielną przez 3. Przyjmijmy więc $n=3k\pm 1$. Wówczas

$$n^3=(3k\pm 1)^3=27k^3\pm 27k^2+9k\pm 1=9\left(3k^3\pm 3k^2+k\right)\pm 1\,.$$

1304. Których reszt nie może dawać przy dzieleniu przez 9 liczba postaci a^3+b^3, gdzie a i b są liczbami całkowitymi dodatnimi?

1305. Których reszt nie może dawać przy dzieleniu przez 9 liczba postaci $a^3+b^3+c^3$, gdzie a, b i c są liczbami całkowitymi dodatnimi?

1306. Jaka może być reszta z dzielenia przez 9 liczby postaci $p_1^3+p_2^3+p_3^3$, gdzie p_1, p_2 i p_3 są liczbami pierwszymi większymi od 3?

1307. Jaka może być reszta z dzielenia przez 9 liczby postaci $p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3$, gdzie p_1, p_2, p_3 i p_4 są liczbami pierwszymi większymi od 3?

1308. Jakich reszt z dzielenia przez 9 nie mogą dawać liczby postaci $p_1^3+p_2^3+p_3^3+p_4^3+p_5^3$, gdzie p_1, p_2, p_3, p_4 i p_5 są liczbami pierwszymi większymi od 3?

1309. Jakich reszt z dzielenia przez 9 nie mogą dawać liczby postaci $p_1^3+p_2^3+\ldots+p_6^3$, gdzie p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 i p_6 są liczbami pierwszymi większymi od 3?

1310. Jakiej reszty z dzielenia przez 9 nie mogą dawać liczby postaci $p_1^3+p_2^3+\ldots+p_7^3$, gdzie p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 i p_7 są liczbami pierwszymi większymi od 3?

1311. Czy sześcian liczby całkowitej dodatniej może mieć sumę cyfr równą 149?

Odpowiedzi do zadań 1282–1297

1282. $19=\sqrt{\dfrac{\left(\left(\sqrt{9}\right)!\right)!}{5}+7}=\dfrac{57}{\sqrt{9}}=\left(7-\sqrt{9}\right)!-5$ **1283.** $22=5\cdot\sqrt{9}+7$

1284. $23=5!-97=5\cdot\left(\sqrt{9}\right)!-7$

1285. 3, 6, 7. **1286.** 7. **1287.** 1, 3, 4, 6. **1288.** 4, 7. **1289.** 0, 5.

1290. Nie, gdyż liczba z końcówką 149 daje przy dzieleniu przez 8 resztę 5.

1291. 0, 2. **1292.** 1, 2. **1293.** 2, 3, 5, 6, 8. **1294.** 3, 6.

1295. Dla $p=3$ otrzymujemy liczbę pierwszą $p^2+2=11$. Jeżeli natomiast liczba pierwsza p jest różna od 3, to jest niepodzielna przez 3, wobec czego liczba p^2+2 jest złożona jako liczba podzielna przez 3 (i jednocześnie większa od 3).

1296. *Sposób I:* Lewa strona równania daje przy dzieleniu przez 4 jedną z reszt 1, 2, a prawa jedną z reszt 0, 3.

Sposób II: Lewa strona równania daje przy dzieleniu przez 3 jedną z reszt 1, 2, a prawa strona jest podzielna przez 3.

1297. Nie, gdyż liczba o sumie cyfr 149 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2.